Lista 18 (Ciało $\mathbf{F}_3$, wielomiany i Set)

Zadanie 1. Przez $\mathbf{F}_3$ oznaczmy zbiór liczb $\{0, 1, 2\}$ z działaniami dodawania i mnożenia modulo 3. Przekonaj się że działania te są przemienne, łączne i rozdzielne, a także że każdy element ma przeciwny, a elementy różne od 0 mają odwrotności.

Tę strukturę (liczby wraz z działaniami) nazywamy *ciałem trzyelementowym* (po angielsku: *three-element field*).

Zadanie 2. Rozważmy płaszczyznę $\mathbf{F}_3^2$.

a) Narysuj ją na tablicy lub w zeszycie.

b) Narysuj prostą przechodzącą przez $(0, 0)$ oraz $(1, 2)$.

c) Narysuj prostą przechodzącą przez $(0, 0)$ oraz $(2, 1)$.

d) Ile jest punktów na prostej?

e) Ile jest różnych prostych przechodzących przez $(0, 0)$?

f) Ile jest wszystkich prostych?

Zadanie 3. Ile możemy wybrać maksymalnie punktów w $\mathbf{F}_3^2$, tak żeby żadne 3 nie leżały na jednej prostej?

Zadanie 4. Przez $\mathbf{F}_3[x]$ oznaczamy zbiór (właściwie *pierścień*, ang. *ring*) wielomianów (polynomials) o współczynnikach (coefficients) z $\mathbf{F}_3$. Wykonaj działania w $\mathbf{F}_3[x]$:

a) $2x^2 + (x^2 + 2x + 1) =$

b) $x \cdot (x^3 + 1) =$

c) $(x^5 + 2x^4) \cdot (x^3 + 2x + 1) =$

Zadanie 5. Podaj przykład dwóch różnych wielomianów $f, g \in \mathbf{F}_3[x]$, które zadają tę samą funkcję $\mathbf{F}_3 \to \mathbf{F}_3$.

Zadanie 6. Sprawdź, że jeżeli $f, g \in \mathbf{F}_3[x]$, to $(f+g)^3 = f^3 + g^3$.

Zadanie 7. Sprawdź, że $f(x) = x^2 + 2$ ma pierwiastek, a $f(x) = x^2 + 1$ nie ma pierwiastków.

Zadanie 8. Sprawdź że jeżeli $a \in \mathbf{F}_3$, to $-a = 2a$ oraz (jeśli $a \neq 0$) $a^{-1} = a$.

Zadanie 9. Niech $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{F}_3[x]$ będzie wielomianem kwadratowym. Kiedy f ma pierwiastki? Znajdź wzór, za pomocą którego można je wyliczyć.

Zadanie 10. Uzasadnij, że jeżeli wielomian kwadratowy f nie ma pierwiastków, to nie istnieją takie wielomiany f_1, f_2 (nie stałe), że $f_1 \cdot f_2 = f$ (tzn. f jest nierozkładalny). Czy jest tak dla wielomianów wyższych stopni?

Zadanie 11. Rozważmy przestrzeń trójwymiarową $\mathbf{F}_3^3$. Ile jest prostych przechodzących przez 0? Ile wszystkich prostych?

A co z przestrzenią czterowymiarową? n-wymiarową?

Zadanie 12. W grę Set gra się za pomocą 81 kart. Każdej z kart odpowiada liczba (od 1 do 3), kolor (czerwony, zielony, fioletowy), kształt (owal, romb, fala) oraz wypełnienie (puste, paskowane lub jednolite). Set to trójka kart, takich że wszystkie mają taki sam kolor lub każda ma inny, wszystkie mają taki sam kształt lub każda ma inny itd. Wykłada się kolejne karty na stół, a jeżeli któryś z graczy znajdzie Seta, zdejmuje tworzące go karty ze stołu, a gra toczy się aż wszystkie karty zostaną wyłożone. Wygrywa ten, kto zbierze najwięcej kart.

Wymyśl kilka przykładów trójek kart, które są Setami.

Opisz, w jaki sposób karty odpowiadają punktom w $\mathbf{F}_3^4$. Czemu odpowiadają Sety?