LXIX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia pierwszego
6 października - 6 listopada 2017 r. (druga seria)

5. Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego. Ponadto, są one długościami boków pewnego trójkąta, w którym jeden z kątów ma miarę $120°$. Udowodnić, że trójkąt ten jest podobny do trójkąta o bokach długości 3, 5, 7.

Rozwiązanie:

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a \leqslant b \leqslant c$. Ponieważ kąt $120°$ jest rozwarty, to leży naprzeciw najdłuższego boku trójkąta. Z twierdzenia cosinusów dostajemy, że

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(120°) = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = a^2 + b^2 + ab.$$

Ponieważ liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego, to spełniona jest równość $a + c = 2b$. Łącząc otrzymane równości dostajemy, że

$$b(a + b) = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a) = 2b(c - a),$$

stąd $a + b = 2c - 2a$. Mamy więc zależności

$$\begin{cases} a - 2b + c &= 0 \\ 3a + b - 2c &= 0. \end{cases}$$

Mnożąc pierwszą równość przez 2 i dodając do drugiej otrzymujemy związek $5a - 3b = 0$, a po pomnożeniu drugiej przez 2 i dodaniu do pierwszej — związek $7a - 3c = 0$. Wobec tego $b = \frac{5}{3}a$ i $c = \frac{7}{3}a$, zatem trójkąt jest podobny do trójkąta o bokach $3, 5, 7$.

6. Podstawą ostrosłupa czworokątnego $ABCDS$ jest równoległobok $ABCD$. Ponadto w ostrosłup $ABCDS$ można wpisać sferę. Wykazać, że suma pól ścian ABS i CDS jest równa sumie pól ścian BCS i ADS.

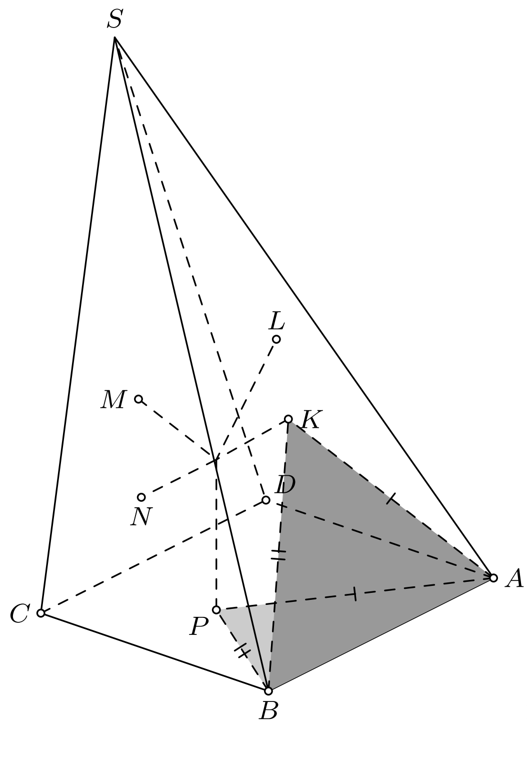
Rozwiązanie:

Niech K, L, M, N i P oznaczają punkty styczności sfery wpisanej ze ścianami ASB, ASD, DSC, BSC oraz $DCBA$, odpowiednio (rys. 1). Na podstawie równości odcinków stycznych do sfery mamy, że $AK = AP$ oraz $BP = BK$, więc trójkąty APB i AKB są przystające.

Analogicznie uzasadniamy przystawanie trójkątów: BPC i BNC, DMC i DPC, APD i ALD, CMS i CNS, SNB i BKS, ASK i ASL oraz SLD i SMD.

Oznaczmy przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$. Ponieważ trójkąty przystające mają równe pola, to

$$\begin{aligned}[ASB] + [DSC] &= ([AKB] + [ASK] + [BKS]) + \\ &\quad + ([DMC] + [SMD] + [CMS]) = \\ &= ([APB] + [ASL] + [SNB]) + \\ &\quad + ([DPC] + [SLD] + [CNS]).\end{aligned}$$



rys. 1

Podobnie dostajemy związek

$$[BSC]+[ASD]=([BPC]+[SNB]+[CNS])+([APD]+[ASL]+[SLD]).$$

Odejmując powyższe równości stronami otrzymujemy, że

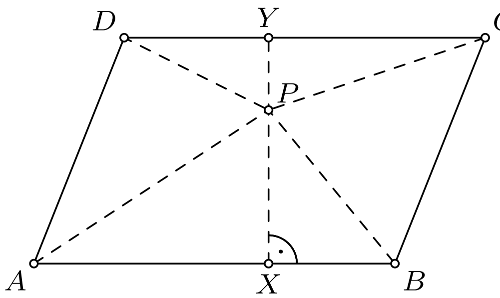
$$[ASB]+[DSC]-([BSC]+[ASD])=[APB]+[DPC]-([BPC]+[APD]),$$

więc wystarczy pokazać zależność $[APB]+[DPC]=[BPC]+[APD]$ lub równoważnie

$$[APB]+[DPC]=\frac{1}{2}[ABCD].$$

Rozpatrzmy równoległobok $ABCD$ (rys. 2) i niech prosta przechodząca przez punkt P i prostopadła do AB przecina odcinki AB i CD w punktach odpowiednio X i Y. Wówczas

$$\begin{aligned}[APB]+[CPD]&=\frac{1}{2}\cdot PX\cdot AB+\frac{1}{2}\cdot PY\cdot CD=\\&=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot(PX+PY)=\\&=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot XY=\frac{1}{2}[ABCD],\end{aligned}$$



rys. 2

skąd teza.

□

7. W przestrzeni danych jest $n\geqslant 7$ zielonych punktów, przy czym żadne cztery z nich nie leżą na jednej płaszczyźnie. Niektóre z nich połączono odcinkami, z których część pomalowano na niebiesko, a pozostałe na czerwono. Przy tym każdy zielony punkt jest końcem takiej samej liczby czerwonych co niebieskich odcinków oraz istnieje zielony punkt, który jest końcem co najmniej sześciu kolorowych odcinków. Udowodnić, że można usunąć co najmniej jeden, ale nie wszystkie kolorowe odcinki tak, by nadal każdy zielony punkt był końcem takiej samej liczby czerwonych co niebieskich odcinków.

Rozwiązanie:

Wybierzmy dowolny zielony punkt, który jest końcem co najmniej sześciu kolorowych odcinków. Niech to będzie punkt P. Rozważmy zbiór łamanych złożonych z kolorowych odcinków o następujących własnościach:

- łamana zaczyna się w punkcie P,
- łamana nie przechodzi ponownie przez punkt P.
- odcinki łamanej są na przemian czerwone i niebieskie, zaczynając od czerwonego,
- każdy kolorowy odcinek jest odcinkiem łamanej co najwyżej raz.

Ze zbioru tych łamanych wybierzmy taką, która składa się z maksymalnej możliwej liczby odcinków. Oznaczmy koniec tej łamanej przez Q. Punkt Q należy do nieparzystej liczby odcinków łamanej, a ponieważ kolory odcinków łamanej występują na przemian i punkt Q jest końcem tej samej liczby czerwonych co niebieskich odcinków, to z punktu Q wychodzi odcinek koloru różnego od koloru ostatniego odcinka łamanej. Skoro nasza łamana ma maksymalną możliwą długość, to drugim końcem tego odcinka musi być punkt P, gdyż w przeciwnym razie moglibyśmy naszą łamaną wydłużyć.

Uzyskaliśmy łamaną której odcinki mają naprzemienne kolory, która zaczyna i kończy się w punkcie P oraz o tej własności, że punkt P nie leży w środku łamanej. Jeżeli pierwszy i ostatni odcinek tej łamanej mają różne kolory, to zbiór odcinków naszej łamanej spełnia warunki zadania. W przeciwnym razie nasza łamana zaczyna i kończy się czerwonym odcinkiem.

W zbiorze pozostałych odcinków analogicznie znajdujemy łamaną zaczynającą i kończącą się w punkcie P, która zaczyna się niebieskim odcinkiem i której odcinki mają naprzemienne kolory. Jeżeli ta łamana kończy się czerwonym odcinkiem, to zbiór jej odcinków spełnia warunki zadania. W innym wypadku zbiór odcinków obu łamanych spełnia warunki zadania. Zauważmy, że nie usuwamy wszystkich odcinków, gdyż usuwamy co najwyżej cztery odcinki, których końcem jest punkt P. $\square$

8. Na płaszczyźnie umieszczono 2017 punktów w taki sposób, że odległość między każdymi dwoma z nich jest większa od 1. Wykazać, że odległość między pewnymi dwoma spośród tych punktów jest większa od 35.

Rozwiązanie:

Przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że każde dwa spośród danych punktów leżą w odległości co najwyżej 35.

Ponieważ odległości pomiędzy danymi punktami są nie większe niż 35, to wszystkie punkty znajdują się w kwadracie 35×35, którego lewy bok wyznacza punkt znajdujący się najbardziej na lewo, zaś górny bok, punkt, który znajduje się najwyżej. Rozważmy koła o środkach w danych punktach i promieniu 1/2. Ponieważ ich środki znajdują się w kwadracie o boku 35, to wnętrza kół znajdują się wewnątrz kwadratu o boku 36. Oszacujmy sumę pól danych kół:

$$2017 \cdot \pi \cdot (1/2)^2 > 2016 \cdot 1/4 \cdot \pi = 504\pi > 504 \cdot 3 = 1512 = 42 \cdot 36 > 36^2.$$

Oznacza to, że pewne dwa z tych kół przecinają się. Środki przecinających się kół znajdują się w odległości mniejszej niż 1, co przeczy założeniu zadania. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy zadania. $\square$

Uwaga. Zadanie można rozwiązać w analogiczny sposób wykorzystując twierdzenie Junga:

Twierdzenie. *Każdy skończony zbiór punktów, wśród których dowolne dwa punkty znajdują się w odległości co najwyżej d, zawiera się w pewnym kole o promieniu $\frac{d}{\sqrt{3}}$.*

Dowód. Aby udowodnić to twierdzenie wystarczy rozważyć koła o środkach w danych punktach i promieniu $\frac{d}{\sqrt{3}}$. Wykażemy, że dowolne trzy spośród tych kół przecinają się. Wybierzmy pewne trzy punkty, jeżeli są one współliniowe, to teza jest oczywista. W przeciwnym razie oznaczmy przez α najmniejszy kąt trójkąta wyznaczonego przez te trzy punkty. Z twierdzenia sinusów wynika, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie nie może być większy niż $\frac{d}{2\sin\alpha} \leqslant \frac{d}{2\sin(60^\circ)} = \frac{d}{\sqrt{3}}$. Oznacza to, że środek okręgu opisanego na tym trójkącie należy do każdego z trzech wybranych kół. Ponieważ każde trzy spośród tych kół mają punkt wspólny, to wszystkie te koła mają punkt wspólny, co jest konsekwencją następującego twierdzenia Helly'ego:

Twierdzenie. *Jeżeli $C_1, C_2, \ldots, C_n$ są wypukłymi podzbiorami płaszczyzny i każde trzy mają punkt wspólny, to zbiór $C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_n$ jest niepusty.*

Niech P będzie dowolnym punktem wspólnym wybranych kół. Pozostaje zauważyć, że koło o środku w punkcie P i promieniu $\frac{d}{\sqrt{3}}$ zawiera dane punkty. $\square$

Więcej o twierdzeniu Junga i Helly'ego można przeczytać np. w książce I. M. Jagłoma i W. G. Bołtiańskiego, Figury wypukłe, PWN, Warszawa 1950.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Analogicznie jak w pierwszym sposobie zakładamy, że odległość między dowolnymi spośród danych punktów jest nie większa niż 35. Z twierdzenia Junga wynika, że punkty te leżą w kole o promieniu $\frac{35\sqrt{3}}{3}$. Rozważamy koła o środkach w danych punktach i promieniu 1/2. Wnętrza tych kół leżą wewnątrz koła o promieniu $\frac{1}{2} + \frac{35\sqrt{3}}{3}$. Podobnie jak w pierwszym sposobie pozostaje zauważyć, że któreś dwa z tych kół przecinają się, gdyż ich suma pól jest większa od pola koła wewnątrz którego się znajdują:

$$2017 \cdot \pi \cdot (1/2)^2 > \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{35\sqrt{3}}{3}\right)^2 \iff \sqrt{2017} > 1 + \frac{70\sqrt{3}}{3}.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż

$$\sqrt{2017} > \sqrt{1936} = 44 = 1 + \frac{129}{3} > 1 + \frac{7 \cdot 18}{3} > 1 + \frac{7 \cdot \sqrt{300}}{3} = 1 + \frac{70\sqrt{3}}{3}.$$

Uwaga. *Zauważmy na koniec, że prowadząc dokładne rachunki w obydwu sposobach, można udowodnić, że pewne dwa spośród danych punktów znajdują się w odległości co najmniej* 38.

(db,mg)