V Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne
Toruń, 9–10 i 12 lipca 1982
Teksty zadań

1. Znaleźć wszystkie takie pary liczb naturalnych n, p, że
$$\mathrm{NWD}\Big((n+1)^p - n,\ (n+1)^{p+3} - n\Big) > 1.$$

2. Niech będzie dany okrąg C o środku M i promieniu 1. W jego wnętrzu leży obszar F wypukły i domknięty, tj. taki, który wraz z dwoma punktami A, B zawiera odcinek AB, a ponadto zawiera cały swój brzeg. Z każdego punktu P na okręgu C wychodzą dwie proste l_1, l_2 styczne do F i tworzące kąt $60°$, w którym mieści się F. Dowieść, że F jest kołem o środku M i promieniu $\frac{1}{2}$.

3. Udowodnić dla $N > 2$ tożsamość:
$$\prod_{i=1}^{N}\left[\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^i}{3^N-1}\right)\right] = \prod_{i=1}^{N}\operatorname{ctg}\left[\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{3^i}{3^N-1}\right)\right].$$

4. Dla danej liczby naturalnej n niech $P(n)$ oznacza iloczyn wszystkich jej cyfr. Określamy ciąg (x_k) przez warunki $x_1 \in \mathbb{N}$, $x_{x+1} = x_k + P(x_k)$, $k \geqslant 1$. Rozstrzygnąć, czy może się zdarzyć, żeby przy pewnym x_1 ciąg (x_k) był nieograniczony (tzn. żeby dla każdego M istniała liczba $x_j > M$).

5. Niech A będzie zbiorem liczb rzeczywistych, zaś a liczbą rzeczywistą. $A + a$ oznacza zbiór $\{y\colon y = x + a,\ x \in A\}$. Dowieść, że jeżeli $A, B \subset I = [0,1] = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ x \in \mathbb{R}\}$ oraz $A \cup B = I$, $A \cap B = \emptyset$, to nie istnieje liczba $a \in \mathbb{R}$ taka, że $B = A + a$.

6. Niech a będzie daną liczbą całkowitą. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f(x)$ określone dla $x \in C$, $x \geqslant a$ i spełniające równanie funkcyjne
$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

7. Znaleźć trójkę (x, y, z) liczb naturalnych z najmniejszą liczbą z, dla której istnieją liczby naturalne a, b, c, d spełniające warunki
$$\begin{aligned}&(\mathrm{A})\ x^y = a^b = c^d, \quad x > a > c,\\ &(\mathrm{B})\ z = ab = cd,\\ &(\mathrm{C})\ x + y = a + b.\end{aligned}$$

8. Dany jest czworościan foremny $ABCD$ o krawędzi długości 1 oraz punkt X wewnątrz $ABCD$. Niech $d(X, AB)$ oznacza odległość punktu X od prostej AB. Dowieść, że
$$d(X,AB) + d(X,AC) + d(X,AD) + d(X,BC) + d(X,BD) + d(X,CD) \geqslant \frac{3\sqrt{2}}{2},$$
przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy X jest środkiem czworościanu $ABCD$.

9. Niech $S_n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{j^2+k^2}}$. Znaleźć liczbę rzeczywistą C taką, żeby dla wszystkich $n \geqslant 3$ zachodziła nierówność
$$n \leqslant S_n \leqslant C \cdot n.$$