VIII Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne
Hollabrunn, 25–27 czerwca 1985

Teksty zadań

1. Liczby rzeczywiste a, b, c wszystkie różne od zera i różne między sobą spełniają warunek $a + b + c = 0$. Dowieść, że
$$\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right) \cdot \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right) = 9.$$

2. Na przyjęciu spotyka się n osób: $O_1, O_2, \ldots, O_n$. Czy możliwe jest, aby miały one odpowiednio: $4, 5, 6, \ldots, k-1, k, k+1, k+1, k+1, k+2, k+2, k+2$ znajomych wśród obecnych? (Jeżeli A jest znajomym B, to B jest znajomym A.)

3. Dowieść, że w czworokącie wypukłym (kąty mniejsze od $180°$) o polu 1 suma długości przekątnych i długości boków jest większa lub równa $4 + \sqrt{8}$.

4. Rozwiązać w $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ układ równań:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy^3 - \frac{9}{8}x = 0 \\ y^4 + x^2 - x^3y - \frac{9}{8}y = 0. \end{cases}$$

5. Za pomocą pewnej liczby jednakowych zestawów odważników (każdy złożony z czterech różnych odważników ważących liczbę naturalną gramów) można uważyć wszystkie masy do 1985 gramów włącznie. Na ile sposobów można dobrać takie zestawy pod warunkiem, że łączna masa wszystkich zestawów jest minimalna?

6. Niech P oznacza punkt wewnątrz czworościanu $ABCD$ (niekoniecznie foremnego). Niech S_A, S_B, S_C, S_D oznaczają odpowiednio środki mas czworościanów odpowiednio $PBCD$, $PACD$, $PABD$, $PABC$ (środek masy czworościanu jest punktem przecięcia prostych przechodzących przez wierzchołki i środki mas ścian przeciwległych). Dowieść, że objętość czworościanu $S_AS_BS_CS_D$ jest 64 razy mniejsza niż objętość czworościanu $ABCD$.

7. Znaleźć górne oszacowanie wielkości
$$\frac{x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3x_4}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$$
dla czwórek liczb rzeczywistych $(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq (0, 0, 0, 0)$.
Uwaga! Im lepsze oszacowanie tym lepsza ocena.

8. Dany jest n-kąt wypukły (kąty mniejsze od $180°$) o wierzchołkach $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ w porządku cyklicznym. Ten n-kąt jest podzielony przekątnymi nie przecinającymi sie w jego wnętrzu, w dowolny sposób na $n-2$ trójkąty. Dowieść, że istnieje co najmniej jedna numeracja tych trókątów $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-2}$ taka, że A_i jest wierzchołkiem Δ_i dla $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Znaleźć liczbę wszystkich takich numeracji.

9. Niech W będzie wielokątem wypukłym. Dowieść, że istnieje Q — punkt wewnętrzny W oraz P_1, P_2, P_3 — trzy wierzchołki W (niekoniecznie kolejne) takie, że kąty między QP_i i bokami przyległymi do P_i są ostre dla $i = 1, 2, 3$.