IX Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne

Wrocław, 25–26 czerwca 1986

Teksty zadań

1. Dany jest trójkąt nieprostokątny $A_1A_2A_3$. Okręgi K_1, K_2 i K_3 są parami styczne (zewnętrznie lub wewnętrznie) i przechodzą przez wierzchołki tak, że $A_2, A_3 \in K_1$, $A_1, A_2 \in K_3$, $A_3, A_1 \in K_2$. Wyznaczyć kąty trójkątów $A_1A_2A_3$, dla których trójkąt utworzony przez środki tych okręgów jest podobny do $A_1A_2A_3$.

2. Niech dla $n > 1$ wielomian

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

ma n różnych pierwiastków rzeczywistych ujemnych. Dowieść, że $a_1P(1) > 2n^2a_0$.

3. Każdy punkt w przestrzeni jest pokolorowany albo na niebiesko, albo na czerwono. Dowieść, że istnieje przynajmniej jeden kwadrat o boku długości 1, z liczbą wierzchołków niebieskich równą 0, 1 lub 4.

4. Wyznaczyć wszystkie trójki (x, y, z) liczb całkowitych dodatnich takie, że

$$x^{z+1} - y^{z+1} = 2^{100}.$$

5. Wyznaczyć wszystkie czwórki (x, y, u, v) liczb rzeczywistych spełniające układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 4 \\ xu + yv = -xv - yu \\ xyu + yuv + uvx + vxy = -2 \\ xyuv = -1. \end{cases}$$

6. Rozpatrujemy zbiór M wszystkich czworościanów, dla których kule wpisana (promień r) i opisana (promien R) są współśrodkowe. Wyznaczyć zbiór wartości, jakie może przyjmować iloraz $\frac{R}{r}$ dla czworościanów ze zbioru M.

7. Dane są liczby naturalne k, n takie, że $0 < k \leqslant \frac{n^2}{4}$ oraz k nie ma dzielnika pierwszego większego niż n, Dowieść, że $n!$ dzieli sie przez k.

8. Parami różne liczby rzeczywiste ustawione są w prostokąt o m wierszach i n kolumnach. W każdym wierszu liczby czytane z lewa na prawo tworzą ciąg rosnący. Zmieniamy porządek liczb w poszczególnych kolumnach tak, aby liczby czytane z góry na dół tworzyły w każdej kolumnie ciąg rosnący. Dowieść, że po tej zamianie liczby we wszysktich wierszach nadal tworzą ciągi rosnące.

9. Wyznaczyć wszystkie funkcje $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągłe i monotoniczne takie, że $F(1) = 1$ oraz

$$F(F(x)) = (F(x))^2$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.