XI Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne

Koszalin, lipiec 1988

Teksty zadań

1. Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Udowodnić, że jeżeli wielomian $Q(x) = P(x) + 12$ ma co najmniej sześć różnych pierwiastków całkowitych to $P(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych.

2. Niech $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ będą liczbami naturalnymi takimi, że $1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Udowodnić, że nierówność
$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} > 0$$
jest spełniona dla każdego ciągu liczb rzeczywistych $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_2 \geqslant 2$.

3. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym (kąty wewnętrzne $< 180°$) bez boków równoległych. Rozpatrujemy dwa kąty utworzone prze pary prostych zawierających przeciwległe boki. Dwusieczne tych kątów przecinają boki czworokąta $ABCD$ w punktach P, Q, R, S, przy czym czworokąt $PQRS$ jest wypukły. Udowodnić, że czworokąt $ABCD$ jest wpisany w koło wtedy i tylko wtedy, gdy $PQRS$ jest rombem.

4. Wyznaczyć wszystkie ściśle rosnące funkcje $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie
$$f\big(f(x) + y\big) = f(x + y) + f(0)$$
dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

5. Dwa ciągi liczb całkowitych (a_k) i (b_k) są związane równościami $b_k = 1 \cdot a_k$, $a_{k+1} = 8 \cdot b_k + 8$, dla $k \geqslant 0$. Zakładamy, że liczba 1988 występuje w ciagu (a_k) lub w ciągu (b_k). Dowieść, że żaden wyraz ciągu (a_k) nie jest kwadratem liczby naturalnej.

6. Dane są trzy proste przechodzące przez punkt O i nie leżące w jednej płaszczyźnie. Punkt O dzieli każdą z tych prostych na dwie półproste. Z każdej prostej wybieramy jedną półprostą; oznaczamy te półproste przez h_1, h_2, h_3. Dowieść, że jeżeli dla każdej trójki punktów $A_1 \in h_1$, $A_2 \in h_2$, $A_3 \in h_3$, $A_i \neq 0$ trójkąt $A_1A_2A_3$ jest ostrokątny, to półproste h_1, h_2, h_3 są parami prostopadłe.

7. Każdy bok ośmiokąta foremnego jest pomalowany na niebiesko lub na żółto. Określamy nowe pokolorowanie w następujący sposób: każdy bok taki, że oba sąsiadujące z nim boki były różnych kolorów, otrzymuje kolor niebieski; każdy bok taki, że oba sąsiadujące z nim boki były jednakowego koloru otrzymuje kolor żółty. Dowieść, że wychodząc z dowolnego pokolorowania dostaniemy w skończonej liczbie kroków (tzn. opisanych wyzej zmian kolorów) ośmiokąt, którego wszystkie boki są żółte. Jaka jest maksymalna potrzebna do tego liczba kroków.

8. Mamy do dyspozycji 1988 przystających sześcianów jednostkowych (tzn. o krawędzi 1). Sklejamy z nich trzy warstwy kwadratowe A, B, C o krawędziach długości a, b, c (tzn. prostopadłościany o wymiarach $a \times a \times 1$, $b \times b \times 1$, $c \times c \times 1$, $a \leqslant b \leqslant c$). Nie wszystkie kostki muszą być użyte. Kładziemy warstwę C na płaszczyznę z prostokątnym układem współrzędnych na pierwszą ćwiartkę układu, tak by wierzchołek warstwy znalazł sie w początku układu. Następnie kładziemy warstwę B na warstwie C tak, by sześciany jednostkowe górnej warstwy nałożyły się dokładnie na sześciany jednostkowe dolnej warstwy i żeby górna warstwa nie wystawała poza dolną; w ten sam sposób kładziemy warstwę A na B. Powstaje trójwarstwowa wieża. Przy jakim wyborze a, b, c liczba możliwych do utworzenia w ten sposób jest największa?

9. Dany jest prostokąt o bokach długości całkowitej $a, b \geqslant 1$. Oznaczmy przez $D(a, b)$ liczbę możliwych podziałów tego prostokąta na wzajemnie przystające prostokąty o bokach długości całkowitej, przy pomocy odcinków poziomych i pionowych mających końce na przeciwległych bokach prostokąta. Wyznaczyć obwód U tego prostokąta, dla którego liczba $\dfrac{D(a, b)}{U}$ jest największa.