XII Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne
Eisenstadt, 28–30 czerwca 1989

Teksty zadań

1. Udowodnić, że jeżeli $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$, $c_1, \ldots, c_n$ są dodatnimi liczbami rzeczywistmi to

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i\Big)^3 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^3\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i^3\Big).$$

2. Punkty płaszczyzny pokolorowane są kolorami A i B. Udowodnić, że istnieje trójkąt równoboczny, którego wszystkie wierzchołki są jednakowego koloru.

3. W układzie dziesiątkowym wyznczyć wszystkie liczby naturalne N spełniające następujące warunki:
(1) $N = aabb$, gdzie aab oraz abb są pierwsze;
(2) $N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$, gdzie p_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ jest k-cyfrową liczbą pierwszą.

4. Niech P będzie płaskim wielokątem wypukłym (wszystkie kąty wewnętrzne mniejsze od $180°$) o n wierzchołkach $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geqslant 3)$. Udowodnić, że istnieje okrąg zawierający wielokąt P i przechodzący przez co najmniej trzy kolejne jego wierzchołki.

5. Niech A będzie wierzchołkiem sześcianu W opisanego na sferze S o promieniu 1. Rozważamy proste g, które prócz A przechodzą przez co najmniej jeden punkt sfery S i oznaczamy punkt $g \cap S$ leżący bliżej A przez P oraz odcinek $g \cap W$ przez AQ. Znaleźć maksimum wartości iloczynu $|AP| \cdot |AQ|$ oraz wszystkie proste g wyznaczające tę wartość maksymalną.

6. Rozważamy ciągi $(a_n)_{n \geqslant 1}$ takie, że dla każdego n różnica $a_{n+1} - a_n$ jest liczbą pierwszą bądź kwadratem liczby pierwszej oraz a_n jest kwadratem liczby naturalnej (dodatniej). Udowodnić, że każdy taki ciąg jest skończony i wyznaczyć najdłuższy z nich.

7. Określamy funkcje f_0, f_1, ... indukcyjnie wzorami:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x && \text{dla } x \in \mathbb{R}, \\ f_{2k+1}(x) &= 3^{f_{2k}(x)} && \text{dla } x \in \mathbb{R} \text{ oraz } k = 0, 1, 2, \ldots, \\ f_{2k}(x) &= 2^{f_{2k-1}(x)} && \text{dla } x \in \mathbb{R} \text{ oraz } k = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

Która z liczb $f_{10}(1)$ i $f_9(2)$ jest większa? (Podać dowód.)

8. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Dla każdego punktu P należącego do wnętrza lub brzegu tego trójkąta oznaczmy przez P_A, P_B, P_C rzuty prostokątne P odpowiednio na odcinki BC, CA, AB. Dla takich punktów P określamy

$$f(P) = \frac{|AP_C| + |BP_A| + |CP_B|}{|PP_A| + |PP_B| + |PP_C|}.$$

Udowodnić, że funkcja $P \mapsto f(P)$ jest stała wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt jest równoboczny.

9. Wyznaczyć najmniejszą nieparzystą liczbę N taką, że N^2 jest sumą pewnej nieparzystej i większej od 1 liczby kwadratów kolejnych liczb naturalnych (większych od zera).