XIII Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne

Poznań, 27–29 czerwca 1990

Teksty zadań

1. Na płaszczyźnie danych jest 8 różnych punktów $A, B, P_1, P_2, \ldots, P_6$, przy czym $P_1, \ldots, P_6$ położone są po tej samej stronie prostej AB. Udowodnić, że jeżeli trójkąty ABP_i $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ są wzajemnie podobne, to punkty $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ leżą na jednym okręgu.

2. Wyznaczyć wszystkie trójki (x, y, z) liczb całkowitych dodatnich x, y, z takich, że
$$x^{(y^z)} \cdot y^{(z^x)} \cdot z^{(x^y)} = 1990^{1990}xyz.$$

3. Udowodnić, że istnieją dokładnie dwie trójki (x, y, z) liczb rzeczywistych x, y, z spełniające układ równań
$$\begin{cases} x + y^2 + z^4 = 0 \\ y + z^2 + x^4 = 0 \\ z + x^2 + y^4 = 0. \end{cases}$$

4. Dla ustalonego $n > 1$ rozważamy układ równań
$$\begin{cases} x_1^4 + 14x_1x_2 + 1 = y_1^4 \\ x_2^4 + 14x_2x_3 + 1 = y_2^4 \\ \vdots \\ x_{n-1}^4 + 14x_{n-1}x_n + 1 = y_{n-1}^4 \\ x_n^4 + 14x_nx_1 + 1 = y_n^4. \end{cases}$$
Wyznaczyć wszystkie rozwiązania $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, w których wszystkie x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ oraz wszystkie y_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ są liczbami całkowitymi dodatnimi.

5. Dla ustalonego $n > 1$ niech S_n będzie zbiorem wszystkich permutacji (wzajemnie jednoznacznych przekształceń) $p\colon \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$. Dla każdej permutacji $p \in S_n$ oznaczmy $F(p) = \sum\limits_{k=1}^{n} |k - p(k)|$. Obliczyć
$$M_n = \frac{1}{n!} \sum_{p \in S_n} F(p)$$
(sumowanie rozciąga sie na wszystkie permutacje $p \in S_n$).

6. Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Załóżmy, że liczby całkowite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 3)$ spełniają następujące warunki:
$$P(x_i) = x_{i+1} \qquad \text{dla } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \qquad \text{oraz} \qquad P(x_n) = x_1.$$
Udowodnić, że $x_1 = x_3$

7. Dany jest zbiór S_n kamieni domina
$$[0|0], [0|1], \ldots, [0|n], [1|1], [1|2], \ldots\ \ldots, [n|n]$$
(tj. jeden kamień dla każdej pary a, b spełniające warunki $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$). Łańcuchem nazywamy dowolny ciąg kolejno ułożonych kamieni, mający postać
$$[a_1|a_2][a_2|a_3] \ldots [a_{k-2}|a_{k-1}][a_{k-1}|a_k]$$
(np. $[0|5][5|5][5|1][1|2]$). Łańcuch nazywamy zamkniętym, gdy $a_k = a_1$.

(a) Udowodnić, że jeśli n jest liczbą parzystą, to istnieje łańcuch zamknięty składający sie ze wszystkich kamieni.

(b) Udowodnić, że jeśli n jest liczbą nieparzystą, to poza dowolnym łańcuchem zamkniętym pozostaje co najmniej $(n + 1)/2$ kamieni.

(c) Załóżmy, że n jest nieparzyste. Ile jest zbiorów A składających sie z $(n + 1)/2$ kamieni, takich, że kamienie zbioru $S_n \setminus A$ dadzą się ustawić w łańcuch zamknięty?

8. Niech R będzie prostokątem o wymiarach 28×48. Rozważamy rozkłady R na przystające prostokąty o wymiarach $a \times b$ ($a \neq b,\ a, b \in N$), których boki są równoległe do boków R. Dla niektórych (a, b) istnieje wiele takich rozkładów, dla niektórych tylko jeden rozkład.

(a) Wyznaczyć wymiary a, b prostokąta o najmniejszej powierzchni, dla którego istnieje tylko jeden rozkład R na prostokąty o wymiarach $a \times b$.

(b) Wyznaczyć wymiary a, b prostokąta o największej powierzchni, dla którego istnieją co najmniej dwa różne rozkłady R na prostokąty o wymiarach $a \times b$.

(Dwa rozkłady traktowane są jako różne jeśli nie są identyczne.)

9. Niech $a_1, \ldots, a_n$ będą liczbami całkowitymi takimi, że każda suma częściowa $a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k}$ ($1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$) jest różna od zera. Udowodnić, że zbiór liczb całkowitych dodatnich można rozłożyć na skoczenie wiele zbiorów tak, że jeśli $x_1, \ldots, x_n$ należą do pewnego wspólnego zbioru tego rozkładu, to $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \neq 0$.