XIV Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne

Bad Ischl, 26–28 czerwca 1991

Teksty zadań

1. (a) Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych $m \geqslant 2$, dla których istnieje liczba naturalna $n = n(m) \geqslant 4$ taka, że zachodzi równość

$$\binom{m}{2} = 3\binom{n}{4}.$$

(b) Podać ogólną postać wszystkich takich liczb m.

2. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb rzeczywistych (x, y, z) spełniające układ równań

$$\begin{cases} (x^2 - 6x + 13)y = 20 \\ (y^2 - 6y + 13)z = 20 \\ (z^2 - 6z + 13)x = 20. \end{cases}$$

3. Dane są dwa różne punkty A_1, A_2 na płaszczyźnie. Wyznaczyć możliwe położenia punktu A_3 o następującej własności: Istnieje liczba naturalna $n \geqslant 3$ oraz istnieje n punktów $P_1, P_2, \ldots, P_n$ takich, że odcinki $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n, P_nP_1$ mają równą długość, a ich środkami są punkty $A_1, A_2, A_3, A_1, A_2, A_3, \ldots$ w wymienionym porządku.

4. Niech $P(x)$ będzie wielomianem (o współczynnikach rzeczywistych) takim, że $P(x) \geqslant 0$ dla wszstkich x z przedziału $\langle 0; 1\rangle$. Wykazać, że istnieją wielomiany $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ takie, że $P_i(x) \geqslant 0$ $(i = 0, 1, 2)$ dla wszystkich x rzeczywistych oraz

$$P(x) = P_0(x) + xP_1(x) + (1 - x)P_2(x).$$

5. Dowieść, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z takich, że $xyz = 1$, zachodzi nierówność

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \geqslant 2(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}).$$

6. Czworokąt wypukły $ABCD$ (kąty wewnętrzne $< 180°$) ma następującą własność: istnieje w jego wnętrzu punkt P taki, że trójkąty PAB, PBC, PCD, PDA mają równe pola. Udowodnić, że co najmniej jedna z przekątnych czworokąta $ABCD$ połowi jego pole.

7. Niech $n \geqslant 1$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Wyznaczyć wartość maksymalną funkcji

$$f(x) = \frac{x + x^2 + \ldots + x^{2n-1}}{(1 + x^n)^2}$$

dla $x > 0$ oraz znaleźć wszystkie $x > 0$, dla których ta maksymalna wartość jest przyjmowana.

8. Dany jest układ kongrugencji

$$\begin{cases} xy \equiv -1 \pmod{z} \\ yz \equiv 1 \pmod{x} \\ zx \equiv 1 \pmod{y}. \end{cases}$$

Ile trójek (x, y, z) złożonych z parami różnych liczb naturalnych dodatnich, z których jedna równa się 19, spełnia powyższy układ?

9. Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną parzystą i niech $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Niech będzie ponadto dana funkcja $g\colon A \longrightarrow A$ o własnościach:

$$\begin{aligned} g(k) &\neq k \quad \text{dla wszystkich } k \in A, \\ g(g(k)) &= k \quad \text{dla wszystkich } k \in A. \end{aligned}$$

Wyznaczyć liczbę funkcji $f\colon A \longrightarrow A$ o własnościach:

$$\begin{aligned} f(k) &\neq g(k) \quad \text{dla wszystkich } k \in A, \\ f(f(f(k))) &= g(k) \quad \text{dla wszystkich } k \in A. \end{aligned}$$