XV Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne

Nowy Sącz, 22–24 czerwca 1992

Teksty zadań

1. Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ oznaczmy przez $s(n)$ sumę wszystkich dodatnich dzielników n. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ iloczyn $s(n-1)s(n)s(n+1)$ jest liczbą parzystą.

2. Każdy punkt kwadratu jest pomalowany jednym kolorem. Rozważamy wszystkie trójkąty prostokątne, których trzy wierzchołki leżą na obwodzie kwadratu. Wyznaczyć najmniejszą liczbę kolorów, dla której istnieje takie pokolorowanie kwadratu, że żaden z rozważanych trójkątów nia ma wszystkich wierzchołków o jednym kolorze.

3. Udowodnić, że dla każdych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$2\sqrt{bc+ca+ab} \leqslant \sqrt{3}\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

4. Niech k będzie liczbą naturalną, a u, v — liczbami rzeczywistymi. Niech

$$P(x) = (x-u^k)(x-uv)(x-v^k) = x^3 + ax^2 + bx + c\,.$$

(a) Dla $k = 2$ dowieść: Jeśli a, b, c są liczbami wymiernymi, to iloczyn uv jest także liczbą wymierną.

(b) Rozstrzygnąć, czy jest to prawda dla $k = 3$.

5. Dane jest koło k o środku O i promieniu r. Niech AB będzie ustaloną średnicą koła k, a K — ustalonym punktem odcinka AO. Przez t oznaczmy styczną do k w punkcie A. Dla każdej cięciwy CD (różnej od AB), przechodzącej przez K, określamy P i Q jako punkty przecięcia prostych BC i BD ze styczną t. Dowieść, że iloczyn długości AP i AQ ma dla każdej cięciwy CD tę samą wartość.

6. Niech $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych. Funkcja $f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ma następujące własności:

$$\begin{aligned} f(92+x) &= f(92-x) \\ f(19\cdot 92+x) &= f(19\cdot 92-x) \qquad (19\cdot 92 = 1748) \\ f(1992+x) &= f(1992-x) \end{aligned}$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{Z}$. Czy jest możliwe, żeby wszystkie dodatnie dzielniki liczby 92 były wartościami funkcji f?

7. Rozważmy trójąt ABC w przestrzeni.

(a) Jakie warunki muszą spełniać kąty α, β, γ trójkąta ABC, aby istniał w przestrzeni taki punkt P, że $\sphericalangle APB$, $\sphericalangle BPC$, $\sphericalangle CPA$ są kątami prostymi?

(b) Niech d będzie największą z odległości $|PA|, |PB|, |PC|$ i niech h będzie najdłuższą wysokością trójkąta ABC. Dowieść, że

$$\tfrac{1}{3}\sqrt{6}\,h \leqslant d \leqslant h.$$

8. Niech $n \geqslant 3$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Liczby rzeczywiste $a_1, \ldots, a_n$ (różne od zera) spełniają równania:

$$\frac{-a_1-a_2+a_3+\ldots+a_n}{a_1} = \frac{a_1-a_2-a_3+a_4+\ldots+a_n}{a_2} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{a_1+\ldots+a_{n-2}-a_{n-1}-a_n}{a_{n-1}} = \frac{-a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}-a_n}{a_n}.$$

Jakie wartości może przyjmować — dla danego n — iloczyn

$$\frac{a_2+\ldots+a_n}{a_1}\cdot\frac{a_1+a_3+\ldots+a_n}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{a_n}\;?$$

9. Niech $n > 1$ będzie liczbą naturalną. Rozważamy słowa złożone z n liter A oraz n liter B. Rozważane słowo $X_1, \ldots, X_{2n}$ należy do zbioru $R(n)$, jeżeli żaden odcinek początkowy $X_1, \ldots, X_k$ $(1 \leqslant k < 2n)$ składa się z jednakowej liczby liter A i B. Oznaczmy przez $r(n)$ i $s(n)$ liczby słów w zbiorach $R(n)$ i $S(n)$. Obliczyć stosunek $\dfrac{s(n)}{r(n)}$.