XVI Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne

Graz, 30 czerwca – 2 lipca 1993

Teksty zadań

1. Rozwiązać w liczbach naturalnych $x, y \geqslant 1$ równanie $2^x - 3^y = 7$.

2. Rozważamy wszystkie czworościany $ABCD$ takie, że suma pól ścian ABD, ACD, BCD jest mniejsza lub równa 1. Wyznaczyć te spośród rozważanych czworościanów, które mają największą objętość.

3. Dla liczby $n = p^k > 1$ będącej potęgą liczby pierwszej określamy $f(n) = n + 1$. Dla liczby $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$ $(r > 1)$ będącej iloczynem potęg różnych liczb pierwszych określamy $f(n) = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$. Dla każdego $m > 1$ konstruujemy ciąg

$$a_0 = m, \qquad a_{j+1} = f(a_j) \qquad \text{dla } j \geqslant 0$$

i oznaczamy przez $g(m)$ najmniejszy wyraz tego ciągu. Dla każdego $m > 1$ wyznaczyć wartość $g(m)$.

4. Liczby Fibonnaciego określone są wzorami

$$F_0 = 1, \qquad F_1 = 1, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad \text{dla } n \geqslant 0.$$

Niech A i B będą takimi liczbami naturalnymi, że B^{93} dzieli A^{19}, a A^{93} dzieli sie przez B^{19}. Udowodnić, że dla każdego naturalnego $n \geqslant 1$ liczba $(A^4 + B^8)^{F_{n+1}}$ jest podzielna przez $(AB)^{F_n}$.

5. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} x^3 + y = 3x + 4 \\ 2y^3 + z = 6y + 6 \\ 3z^3 + x = 9z + 8. \end{cases}$$

6. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b \geqslant 0$ zachodzą trzy nierówności:

$$\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a + \sqrt[3]{a^2 b} + \sqrt[3]{ab^2} + b}{4} \leqslant \frac{a + \sqrt{ab} + b}{3} \leqslant \sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}{2}\right)^3}.$$

Dla każdej z tych nierówności ustalić, kiedy zachodzi równość.

7. Rozważmy ciąg (a_n) dany wzorami

$$a_0 = 0, \qquad a_{n+1} = [\sqrt[3]{a_n + n}]^3 \qquad \text{dla } n \geqslant 0$$

($[x]$ jest największą liczbą całkowitą $\leqslant x$).

(a) Podać wzór jawny na a_n, który wyraża a_n jako funkcję tylko zmiennej n.

(b) Wyznaczyć wszystkie n takie, że $a_n = n$.

8. Wyznaczyć wszystkie wielomiany rzeczywiste $P(x)$, dla których istnieje dokładnie jeden wielomian rzeczywisty $Q(x)$ spełniający warunki

$$Q(0) = 0, \qquad x + Q\big(y + P(x)\big) = y + Q\big(x + P(y)\big) \qquad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

(Uwaga. Różnym wielomianom $P(x)$ mogą odpowiadać różne wielomiany $Q(x)$.)

9. Na przedłużeniu boku AB trójkąta równobocznego ABC obieramy punkt P tak, że A leży między B i P. Oznaczmy przez a długość boku trójkąta ABC, przez r_1 — promień okręgu wpisanego w trójkąt PAC, przez r_2 — promień okręgu dopisanego do trójkąta PBC przy boku BC. Obliczyć sumę $r_1 + r_2$ jako funkcję zmiennej a.