XVII Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne

Pogorzel Warszawska, 29 czerwca – 1 lipca 1994

Teksty zadań

1. Funkcja $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ warunki:
(a) $f(x+19) \leqslant f(x) + 19$ oraz (b) $f(x+94) \geqslant f(x) + 94$.
Udowodnić, że $f(x+1) = f(x) + 1$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

2. Ciąg (a_n) jest określony wzorami

$$a_0 = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n^2} \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

zaś ciag (c_n) jest określony wzorami

$$c_0 = 4 \quad \text{oraz} \quad c_{n+1} = c_n^2 - 2c_n + 2 \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Dowieść, że

$$a_n = \frac{2c_0c_1 \ldots c_{n-1}}{c_n} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

3. Prostokątny budynek składa się z dwóch rzędów po 15 kwadratowych pokoi (położonych jak pola dwóch sąsiednich rzędów szachownicy). W każdym pokoju jest troje drzwi, które prowadzą do jednego, do dwóch lub do wszystkich trzech sąsiadujących pokoi. (Drzwi prowadzące z budynku na zewnątrz nie są liczone). Drzwi są tak rozmieszczone, że z każdego pokoju można przejść do każdego innego, nie opuszczając budynku. Ile jest możliwych rozmieszczeń drzwi (w ścianach między tymi 30 pokojami), które spełniają powyższe warunki?

4. Niech $n \geqslant 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną i niech P_0 będzie ustalonym wierzchołkiem $(n+1)$-kąta foremnego. Pozostałe wierzchołki oznaczamy symbolami $P_1, P_2, \ldots, P_n$, w dowolnym porządku. Każdemu bokowi $(n+1)$-kąta przyporządkowujemy liczbę naturalną w następujący sposób: jeśli końcami boku są punkty P_i oraz P_j, to przyporządkowana mu liczba równa się $|i-j|$. Niech S będzie sumą wszystkich $n+1$ liczb przyporządkowanych bokom. (Oczywiście S zależy od porządku oznaczenia wierzchołków.)
(a) Jaka jest — przy ustalonym n — najmniejsza możliwa wartość S?
(b) Ile różnych uporządkowań oznaczeń wierzchołków daje tę minimalną wartość S?

5. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie

$$\tfrac{1}{2}(x+y)(y+z)(z+x) + (x+y+z)^3 = 1 - xyz.$$

6. Niech $n > 1$ będzie nieparzystą liczbą naturalną. Zakładamy, że liczby całkowite $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$ spełniają następujący układ równań:

$$\begin{cases} (x_2 - x_1)^2 + 2(x_2 + x_1) + 1 = n^2 \\ (x_3 - x_2)^2 + 2(x_3 + x_2) + 1 = n^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ (x_1 - x_n)^2 + 2(x_1 + x_n) + 1 = n^2 \end{cases}$$

Dowieść, że albo $x_1 = x_n$, albo istnieje j $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ takie, że $x_j = x_{j+1}$.

7. Wyznaczyć wszystkie dwucyfrowe (przy zapisie w systemie dziesiętnym) liczby naturalne $n = (ab)_{10} = 10a + b$ $(a \geqslant 1)$ o tej własności, że dla każdej liczby całkowitej x różnica $x^a - x^b$ dzieli się przez n.

8. Rozważmy równanie funkcyjne

$$f(x, y) = af(x, x) + bf(y, z)$$

ze stałymi rzeczywistymi a, b. Dla każdej pary liczb rzeczywistych a, b podać ogólną postać funkcji $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnijącej dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}$ powyższe równanie funkcyjne.

9. Na płaszczyźnie dane są cztery różne punkty A, B, C, D leżące (w takim porządku) na prostej g, w odległości $|AB| = a,\ |BC| = b,\ |CD| = c$.
(a) Skonstruować — jeśli to możliwe — punkt P, nie leżący na prostej g, taki, by kąty APB, BPC, CPD były równe.
(b) Udowodnić, że taki punkt P istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi nierówność

$$(a + b)(b + c) < 4ac.$$