XVIII Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne

Hollabrunn, 28–30 czerwca 1995

Teksty zadań

1. Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania $(a_1, ..., a_n)$ następującego układu równań:

$$\begin{cases} a_3 = a_2 + a_1 \\ a_4 = a_3 + a_2 \\ \quad \vdots \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_1 = a_n + a_{n-1} \\ a_2 = a_1 + a_n \end{cases}$$

gdzie $a_1, \ldots, a_n$ mają być liczbami rzeczywistymi.

2. Niech A_1, A_2, A_3, A_4 będą czterema różnymi punktami na płaszczyźnie i niech $X = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. Wykazać, że istnieje podzbiór Y zbioru X o następującej własności: nie istnieje koło K takie, że $K \cap X = Y$.
Uwaga. Wszystkie punkty okręgu zaliczamy do koła.

3. Niech $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Wykazać, że istnieją dwa wielomiany $Q(y)$ i $R(y)$ stopnia większego lub równego 1, o współczynnikach całkowitych, takie, że dla każdego y

$$Q(y) \cdot R(y) = P(5y^2).$$

4. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych takie, że dla każdego $x \neq 0$

$$\Big(P(x)\Big)^2 + \left(P\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 = P\left(x^2\right) P\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

5. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Niech A_1 będzie środkiem boku BC, B_1 — środkiem boku CA i C_1 — środkiem boku AB. Niech p, q, r będą trzema różnymi prostymi równoległymi takimi, że punkt A_1 leży na prostej p, punkt B_1 leży na prostej q i punkt C_1 leży na prostej r. Prosta p przecina prostą B_1C_1 punkcie A_2, prosta q przecina prostą C_1A_1 w punkcie B_2 i prosta r przecina prostą A_1B_1 w punkcie C_2. Dowieść, że trzy proste AA_2, BB_2, CC_2 przecinają się w jednym punkcie D i ten punkt D leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

6. Klub Alpinistyczny, liczący n członków, organizuje cztery wyprawy wysokogórskie dla swoich członków. Niech E_1, E_2, E_3, E_4 będą zespołami uczestniczącymi w tych wyprawach. Na ile sposobów można wybrać te zespoły pod warunkiem, że

$$E1 \cap E2 \neq 0, \quad E2 \cap E3 \neq 0, \quad E3 \cap E4 \neq 0?$$

7. Dla każe liczby całkowitej c rozważamy równanie: $3y^4 + 4cy^3 + 2xy + 48 = 0$. W tym równaniu niewiadome x i y są liczbami całkowitymi. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite c takie, że liczba rozwiązań całkowitoliczbowych (x, y), spełniających dodatkowe warunki (i) i (ii) jest największa:
(i) liczba $|x|$ jest kwadratem liczby całkowitej;
(ii) liczba y jest bezkwadratowa, tzn. nie istnieje liczba pierwsza p taka, że p^2 jest dzielnikiem y.

8. Rozważamy sześcian, którego osiem wierzchołków ma współrzędne $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, tzn. zbiór punktów $\{(x,y,z) : |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1, |z| \leqslant 1\}$. Niech $V_1, \ldots, V_{95}$ będą punktami tego sześcianu. Oznaczmy przez $\mathbf{v}_i$ wektor od punktu $(0,0,0)$ do punktu V_i. Rozważamy 2^{95} wektorów postaci $s_1\mathbf{v}_1 + \cdots + s_{95}\mathbf{v}_{95}$, gdzie $s_i = +1$ lub $s_i = -1$.
(a) Niech $d = 48$. Wykazać, że wśród tych wektorów znajduje się wektor $\mathbf{w} = [a,b,c]$ taki, że $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leqslant d$.
(b) Znaleźć liczbę $d < 48$ o tej własności.
Uwaga. Im mniejsza będzie liczba d, tym wyżej ocenione rozwiązanie.

9. Udowodnić, że dla wszystkich liczb naturalnych $n, m \geqslant 1$ i dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych x, y zachodzi następująca nierówność:

$$(n-1)(m-1)(x^{n+m} + y^{n+m}) + (n+m-1)(x^n y^m + x^m y^n) \geqslant nm(x^{n+m-1}y + xy^{n+m-1}).$$