XIX Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne

Zajączkowo, 26–28 czerwca 1996

Teksty zadań

1. Niech k będzie liczbą naturalną, $k \geqslant 1$. Udowodnić, że istnieje dokładnie 3^{k-1} liczb naturalnych n o następujących własnościach:

(1) liczba n ma dokładnie k cyfr w układzie dziesiątkowym;

(2) wszystkie cyfry liczby n są nieparzyste;

(3) liczba n jest podzielna przez 5;

(4) liczba $m = n/5$ ma k cyfr nieparzystych (w układzie dziesiątkowym).

2. Sześciokąt wypukły $ABCDEF$ spełnia następujące warunki:

(1) przeciwległe boki są równoległe: $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$;

(2) odległości między przeciwległymi bokami są równe; to znaczy, $d(AB, DE) = d(BC, EF) = d(CD, FA)$, gdzie $d(g, h)$ oznacza odległość między prostymi równoległymi g i h;

(3) kąty FAB i CDE są proste.

Udowodnić, że przekątne BE i CF przecinają się pod kątem $45°$.

3. Wielomiany $P_n(x)$ są zdefiniowane rekurencyjnie:

$$P_0(x) = 0, \quad P_1(x) = x \quad \text{oraz} \quad P_n(x) = xP_{n-1}(x) + (1-x)P_{n-2}(x) \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2.$$

Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ znaleźć wszystkie liczby rzeczywste x, które spełniają równanie $P_n(x) = 0$.

4. Liczby rzeczywiste x, y, z, t spełniają równości $x + y + z + t = 0$ oraz $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$. Udowodnić, że

$$-1 \leqslant xy + yz + zt + tx \leqslant 0.$$

5. Wielościan wypukły P i sfera S są położone w przestrzeni w ten sposób, że sfera S wycina z każdej krawędzi AB wielościanu P odcinek XY taki, że $|AX| = |XY| = |YB| = \frac{1}{3}|AB|$. Udowodnić, że istnieje sfera styczna do wszystkich krawędzi wielościanu P.

6. Dane są liczby naturalne k, n takie, że $1 < k < n$. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ n równań:

$$x_i^3 \cdot (x_i^2 + x_{i+1}^2 + \cdots + x_{i+k-1}^2) = x_{i-1}^2 \quad \text{dla} \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

z n niewiadomymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Uwaga: x_0 oznacza x_n oraz $x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2, x_{n+3} = x_3$, i tak dalej.

7. Udowodnić, że istnieją nieujemne liczby całkowite k i m spełniające równanie

$$k! + 48 = 48(k+1)^m.$$

8. Udowodnić, że nie istnieje wielomian $P(x)$ stopnia 998 o współczynnikach rzeczywistych taki, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest równość $(P(x))^2 - 1 = P(x^2 + 1)$.

9. Mamy prostopadłościenne klocki, z których żaden nie jest sześcianem. Długość krawędzi klocków są liczbami całkowitymi. Dla każdej trójki liczb całkowitych (a, b, c), dla której nie zachodzi równość $a = b = c$, mamy wystarczającą liczbę klocków o wymiarach $a \times b \times c$. Załóżmy, że takimi klockami całkowicie wypełniliśmy sześcienne pudełko o wymiarach $10 \times 10 \times 10$.

(a) Załóżmy następnie, że użyliśmy co najmniej 100 klocków. Udowodnić, że istnieją co najmniej dwa klocki o tych samych wymiarach położone równolegle, w tym sensie, że jeśli AB jest krawędzią jednego klocka, a $A'B'$ krawędzią drugiego oraz jeśli $AB \parallel A'B'$, to $|AB| = |A'B'|$.

(b) Wykazać to samo dla liczby użytych klocków mniejszej niż 100. Im mniejsza liczba, tym lepsze rozwiązanie.