XXIV Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne

St. Georgen im Attergau 2001

I dzień

Zad. 1. Wyznaczyć liczbę całkowitych dodatnich wartości a, dla których istnieją takie nieujemne liczby całkowite $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2001}$, że

$$a^{x_0} = \sum_{k=1}^{2001} a^{k_k}.$$

Zad. 2. Niech n będzie liczbą całkowitą większą od 2. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych nieujemnych $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ następujący układ równań:

$$x_k + x_{k+1} = x_{k+2}^2 \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

gdzie $x_{n+1} = x_1$ i $x_{n+2} = x_2$.

Zad. 3. Niech a, b, c będą długościami boków trójkąta. Udowodnić, że

$$2 < \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} - \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \leqslant 3.$$

II dzień

Zad. 4. Udowodnić, że jeśli a, b, c, d są długościami kolejnych boków czworokąta (niekoniecznie wypukłego) o polu S, to spełniona jest nierówność:

$$S \leqslant \frac{1}{2}(ac + bd).$$

Zad. 5. Odbywamy zamkniętą podróż skoczkiem po szachownicy, odwiedzając każde z 64 pól dokładnie jeden raz i numerując kolejno odwiedzone pola liczbami od 1 do 64. Następnie wybieramy dodatnie liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_{64}$. Dla każdego białego pola z numerem i określamy

$$y_i = 1 + x_i^2 - \sqrt[3]{x_{i-1}^2 x_{i+1}},$$

a dla każdego czarnego pola z numerem j określamy

$$y_j = 1 + x_j^2 - \sqrt[3]{x_{j-1}^2 x_{j+1}},$$

gdzie $x_0 = x_{64}$ i $x_{65} = x_1$. Udowodnić, że $\sum\limits_{i=1}^{64} y_i \geqslant 48$.

Zad. 6. Dla ustalonej dodatniej liczby całkowitej k rozważamy ciąg $(a_n)_{n\geqslant 0}$ zdefiniowany następująco: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \lceil \sqrt[k]{a_n} \rceil$ dla każdego $n \geqslant 0$, gdzie $\lceil x \rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą niż x. Dla każdego $k \geqslant 1$ wyznaczyć zbiór A_k składający się ze wszystkich całkowitych wartości ciągu $(\sqrt[k]{a_n})_{n\geqslant 0}$.

III dzień

Zad. 7. Rozważmy dodatnie liczby całkowite N, w których rozwinięciu dziesiętnym nie występuje cyfra 0 i których suma cyfr $S(N)$ jest dzielnikiem N.
a) Udowodnić, że wśród rozważanych liczb N istnieje nieskończenie wiele takich, w których rozwinięciu dziesiętnym każda z cyfr od 1 do 9 występuje tyle samo razy.
b) Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej k wśród rozważanych liczb N istnieje liczba k-cyfrowa.

Zad. 8. Dany jest graniastosłup prosty o wysokości 1, którego podstawa jest ośmiokątem foremnym o boku 1, a punkty $M_1, M_2, \ldots, M_{10}$ są wszystkimi środkami jego ścian. Dla dowolnego punktu P leżącego wewnątrz graniastosłupa niech P_i oznacza punkt przecięcia prostej M_iP z jego powierzchnią, różny od M_i. Wybieramy punkt P w ten sposób, że żaden z punktów P_i nie leży na krawędzi, a na każdej ścianie znajduje się dokładnie jeden z punktów P_i. Udowodnić, że $\sum\limits_{i=1}^{10} \frac{M_iP}{M_iP_i} = 5$.

Zad. 9. Niech n będzie liczbą całkowitą większą od 10 i niech A będzie zbiorem $2n$-elementowym. Przypuśćmy, że $A_1, \ldots, A_M$ są n-elementowymi podzbiorami zbioru A o tej własności, że każde przecięcie $A_i \cap A_j \cap A_k$ dla $i \neq j \neq k \neq i$ ma co najwyżej 1 element. Znaleźć największą możliwą wartość m w zależności od n.

Zad. 10. Dany jest ciag $a_1, a_2, \ldots, a_{2010}$. Suma każdych 20 kolejnych wyrazów tego ciągu jest nieujemna. Dla każdego $i \in \{1, \ldots, 2009\}$ mamy $|a_i - a_{i+1}| \leqslant 1$. Znaleźć najmniejszą możliwą wartość liczby $\sum\limits_{i=1}^{2010} a_i$.