XXV Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne

Pułtusk 2002

I dzień

Zad. 1. Znaleźć wszystkie uporządkowane trójki liczb całkowitych nieujemnych (a, b, c) takie, że liczba $2^a + 2^b + 1$ dzieli się przez $2^c - 1$.

Zad. 2. Niech $P_1P_2 \ldots P_{2n}$ będzie dowolnym wielokątem wypukłym o parzystej liczbie wierzchołków. Udowodnić, że istnieje przekątna P_iP_j, która nie jest równoległa do żadnego boku wielokąta.

Zad. 3. Dany jest czworościan $ABCD$ (niekoniecznie foremny), w którym S jest środkiem ciężkości. Prosta przechodząca przez S przecina powierzchnię czworościanu w punktach K i L. Udowodnić, że długości odcinków KS i LS spełniają nierówności:

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{KS}{LS} \leqslant 3.$$

II dzień

Zad. 4. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n wyznacz największy podzbiór $M(n)$ zbioru liczb rzeczywistych, mający następującą własność: dla dowolnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prawdziwa jest nierówność:

$$n + \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} \geqslant n \prod_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Kiedy zachodzi równość?

Zad. 5. Niech $A = \{2, 7, 11, 13\}$. Wielomian $f(x)$ o współczynnikach całkowitych ma następującą własność: dla każdej liczby całkowitej n istnieje $p \in A$ takie, że $p|f(n)$. Wykazać, że istnieje $p \in A$ takie, że dla każdej liczby całkowitej n zachodzi $p|f(n)$.

Zad. 6. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie E. Niech U będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABE, a H punktem przecięcia jego wysokości. Podobnie, niech V będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie CDE, a K punktem przecięcia jego wysokości. Udowodnić, że punkt E leży na prostej UK wtedy i tylko wtedy, gdy leży on na prostej VH.

III dzień

Zad. 7. Wyznaczyć wszystkie funkcje rzeczywiste f, określone na zbiorze liczb całkowitych dodatnich, spełniające następujące warunki:
a) $f(x+22) = f(x)$;
oraz
b) $f(x^2 y) = f(x)^2 f(y)$,
dla wszystkich liczb całkowitych dodatnich x i y.

Zad. 8. Wyznaczyć, w zależności od n, liczbę rozwiązań rzeczywistych układu równań:

$$\begin{cases} \cos(x_1) = x_2, \\ \cos(x_2) = x_3, \\ \quad\vdots \\ \cos(x_{n-1}) = x_n, \\ \cos(x_n) = x_1. \end{cases}$$

Zad. 9. Na święto w Pułtusku przyszły 2002 osoby. W każdej grupie składającej się z 1001 osób jest taka sama liczba $N > 0$ par osób, które się znają (jeśli A zna B to B zna A). Ile co najmniej par znajomych jest wśród tych 2002 osób?

Uwaga! Im większa liczba, tym lepsza ocena rozwiązania.

Zad. 10. Dla każdej liczby rzeczywistej x rozpatrujemy rodzinę $F(x)$ wszystkich ciągów $(a_n)_{n \geqslant 0}$ spełniających warunek:

$$a_{n+1} = x - \frac{1}{a_n} \quad (n \geqslant 0).$$

Liczbę naturalną p będziemy nazywać *okresem minimalnym* dla rodziny $F(x)$, gdy:
a) każdy ciąg $(a_n) \in F(x)$ ma okres p, tzn. $a_{n+p} = a_n$ (dla wszystkich $n \geqslant 0$),
b) dla każdego $q < p$ istnieje ciąg $(a_n) \in F(x)$, dla którego q nie jest okresem.

Czy dla każdej liczby całkowitej dodatniej P istnieje $x = x(P)$ takie, że rodzina $F(x)$ ma okres minimalny $p > P$? Odpowiedź uzasadnić.