XXVI Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne

Graz, 21 czerwca – 1 lipca 2003

Teksty zadań

1. Znaleźć wszystkie wielomiany $P(y)$ o współczynnikach rzeczywistych takie, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$P(x-1) \cdot P(x+1) = P(x^2-1).$$

2. Niech a będzie liczbą całkowitą dodatnią. Określamy ciąg (a_n) następująco:

$a_0 = a$;

$a_{n+1} = a_n + E(a_n)$ dla $n \geqslant 0$, gdzie $E(x)$ oznacza cyfrę jedności liczby naturalnej x w układzie dziesiętnym.

(a) Udowodnić, że ciąg (a_n) jest od pewnego miejsca stały lub zawiera nieskończenie wiele wyrazów podzielnych przez $d = 3$.

(b) Dla jakich innych liczb naturalnych d zachodzi analogiczna teza jak w (a)? (odpowiedź uzasadnić)

3. Na boku AB o długości c trójkąta ABC określamy punkty T_1 i T_2 takie, że

$$AT_1 = T_1T_2 = T_2B.$$

Podobnie określamy punkty T_3 i T_4 na boku BC (o długości a) takie, że

$$BT_3 = T_3T_4 = T_4C$$

oraz punkty T_5 i T_6 na boku CA (o długości b) takie, że

$$CT_5 = T_5T_6 = T_6A.$$

(a) Udowodnić, że $a' = BT_5$, $b' = CT_1$ i $c' = AT_3$ są bokami pewnego trójkąta $A'B'C'$.

(b) W trójkącie $A'B'C'$ określamy analogicznie punkty $T_1', T_2', \ldots, T_6'$. Zatem (analogicznie jak w (a)) $a'' = B'T_6'$, $b'' = C'T_2'$ i $c'' = A'T_4'$ są bokami pewnego trójkąta $A''B''C''$. Udowodnić, że trójkąty $A''B''C''$ i ABC są podobne oraz wyznaczyć stosunek podobieństwa $a'' : a$.

4. Liczbę naturalną m nazwiemy *liczbą alpejską*, gdy istnieje taka liczba naturalna $n = n(m)$, że $2^{2n+1}+1$ dzieli się przez m. Udowodnić, że iloczyn dwóch liczb alpejskich jest również liczbą alpejską.

5. Dany jest trójkąt o bokach długości a, b, c i polu F. Niech x, y i z będą odległościami środka ciężkości od wierzchołków. Udowodnić, że jeżeli zachodzi nierówność

$$x + y + z \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2} + 2F\sqrt{3}},$$

to trójkąt ten jest równoboczny.

6. Dany jest czworościan $ABCD$ (niekoniecznie foremny) mający następującą własność:

Istnieje sfera $\kappa = \kappa(A, B, C)$, dla której:

(a) BC jest średnicą okręgu powstałego z przecięcia κ z płaszczyzną BCD;

(b) AC jest średnicą okręgu powstałego z przecięcia κ z płaszczyzną ACD;

(c) AB jest średnicą okręgu powstałego z przecięcia κ z płaszczyzną ABD.

Udowodnić, że istnieją sfery $\kappa(A, B, D)$, $\kappa(B, C, D)$ i $\kappa(C, A, D)$ mające analogiczne własności do (a), (b) i (c).

7. Dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ oznaczmy $f(n) = \dfrac{n^n - 1}{n - 1}$.

(a) Wykazać, że $n!^{f(n)} \mid (n^n)!\,$.

(b) Znaleźć możliwie dużo (im więcej tym lepiej) liczb naturalnych n takich, że $n!^{f(n)+1}$ nie dzieli $(n^n)!\,$.

8. Dane są liczby rzeczywiste $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{2003} \geqslant 0$. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi następująca nierówność:

$$x_1^n - x_2^n + x_3^n - x_4^n + \ldots - x_{2002}^n + x_{2003}^n \geqslant (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots - x_{2002} + x_{2003})^n\,.$$

9. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ wybieramy 26 parami różnych liczb. Wykazać, że dla każdego wyboru istnieje niepusty podzbiór taki, że iloczyn jego elementów jest kwadratem liczby naturalnej (jeśli podzbiór składa się tylko z jednej liczby x, to definiujemy, że iloczyn wynosi x).

10. A) Dany jest prostokąt o wymiarach 31×5 podzielony na kwadraty jednostkowe (np. prostokątna szachownica). Poza tym dysponujemy dostatecznie dużą liczbą klocków o wymiarach 1×5. Można je kłaść na prostokąt tylko tak, aby zakrywały dokładnie 5 kwadratów jednostkowych i nie zachodziły na siebie.

(a) Ile co najmniej klocków należy położyć, aby uniemożliwić dalsze dopuszczalne układanie (taką sytuację nazwiemy *blokadą*)?

(b) Ile jest różnych blokad z minimalną użytą liczbą klocków? (prostokąt jest w stosunku do nas nieruchomy i każde dwie nieidentyczne blokady traktujemy jako różne).

B) Odpowiedzieć na pytania (a) i (b) dla prostokąta o wymiarach 52×5.