XXVII Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne

Władysławowo, 26–28 czerwca 2004

Teksty zadań

1. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n przez $S(n)$ oznaczmy sumę cyfr liczby n (w zapisie dziesiętnym). Niech

$$N = \sum_{k=10^{2003}}^{10^{2004}-1} S(k).$$

Obliczyć $S(N)$.

2. W trójkącie ABC niech D będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta C z bokiem AB. Przez P oznaczmy pole trójkąta ABC. Udowodnić, że zachodzi nierówność

$$2P \cdot \left(\frac{1}{AD} - \frac{1}{BD}\right) \leqslant AB.$$

3. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych a, b, c, d układ równań

$$\begin{cases} a - \sqrt{1-b^2} + \sqrt{1-c^2} = d, \\ b - \sqrt{1-c^2} + \sqrt{1-d^2} = a, \\ c - \sqrt{1-d^2} + \sqrt{1-a^2} = b, \\ d - \sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} = c. \end{cases}$$

4. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których $n^{10} + n^5 + 1$ jest liczbą pierwszą.

5. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 27, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{24} \end{cases}$$

ma rozwiązanie w dodatnich liczbach rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

6. Dla $n = 2^m$ (m jest dodatnią liczbą całkowitą) rozpatrujemy zbiór $M(n) = \{1, 2, \ldots, n\}$. Udowodnić, że liczby ze zbioru $M(n)$ można ustawić w taki ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n$, że dla dowolnych $i, j, k,\ 1 \leqslant i < j < k \leqslant n$ zachodzi

$$a_j - a_i \neq a_k - a_j.$$

7. Wyznaczyć wszystkie funkcje f określone na zbiorze dodatnich liczb całkowitych, przyjmujące wartości całkowite i spełniające następujący warunek:

Dla wszystkich względnie pierwszych, dodatnich liczb x, y zachodzi równość

$$f(x+y) = f(x+1) + f(y+1).$$

8. (a) Udowodnić, że gdy $n = 4$ lub $n \geqslant 6$, to każdy trójkąt ABC można podzielić na n podobnych do ABC trójkątów (niekoniecznie do siebie przystających).

(b) Udowodnić, że trójkąta równobocznego nie można podzielić ani na 3, ani na 5 trójkątów równobocznych.

(c) Rozstrzygnąć, czy istnieje trójkąt ABC, który można podzielić zarówno na 3, jak i na 5 trójkątów w sposób analogiczny, jak w punkcie (a) (podać przykład takiego trójkąta i jego podziałów lub uzasadnić, że taki trójkąt nie istnieje).

9. Dane są ciągi dwustronne

$$\langle \ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle, \qquad \langle \ldots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \ldots \rangle, \qquad \langle \ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots \rangle$$

o wyrazach dodatnich. Dla każdej liczby całkowitej n zachodzą nierówności

$$a_n \geqslant \frac{1}{2}(b_{n+1} + c_{n-1}),$$
$$b_n \geqslant \frac{1}{2}(c_{n+1} + a_{n-1}),$$
$$c_n \geqslant \frac{1}{2}(a_{n+1} + b_{n-1}).$$

Wyznaczyć $a_{2005}, b_{2005}, c_{2005}$, jeśli $a_5 = 26$, $b_0 = 6$, $c_0 = 2004$.

10. Dla każdego wielomianu $Q(x)$ oznaczmy przez $M(Q)$ zbiór takich nieujemnych liczb całkowitych x, że $0 < Q(x) < 2004$. Rozważamy wielomiany $P_n(x)$ postaci

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + 1,$$

gdzie współczynniki $a_i = \pm 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Dla każdego $n = 3^k$, $k > 0$, wyznaczyć

(a) m_n — maksymalną liczbę elementów zbioru $M(P_n)$ po wszystkich rozważanych wielomianach $P_n(x)$;

(b) wszystkie wielomiany $P_n(x)$, dla któych $|M(P_n)| = m_n$.