wersja polska

Drużynowe Zawody Matematyczne Baltic Way 2002

Tartu, 2 listopada 2002

Czas trwania zawodów: 4,5 godziny.
Odpowiedzi na pytania dotyczące zadań są udzielane podczas pierwszych 30 minut.

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 - 6abc & = & 1 \\ b^3 + 3ba^2 + 3bc^2 - 6abc & = & 1 \\ c^3 + 3ca^2 + 3cb^2 - 6abc & = & 1. \end{cases}$$

2. Niech a, b, c, d będą takimi liczbami rzeczywistymi, że

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= -2\,, \\ ab + ac + ad + bc + bd + cd &= 0\,. \end{aligned}$$

Udowodnić, że co najmniej jedna z liczb a, b, c, d jest nie większa niż -1.

3. Wyznaczyć wszystkie takie ciągi $a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$ liczb rzeczywistych, że

$$a_{m^2+n^2} = a_m^2 + a_n^2$$

dla dowolnych liczb całkowitych $m, n \geqslant 0$.

4. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dowieść, że

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(1 - x_i)^2 \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takich, że $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$.

5. Wyznaczyć wszystkie pary $(a,\, b)$ takich liczb wymiernych dodatnich, że

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}\,.$$

6. Na prostokątnej planszy o wymiarach $m \times n$, $m, n \geqslant 2$, podzielonej na pola będące jednostkowymi kwadratami, rozgrywana jest następująca jednoosobowa

gra. Na początku na pewnym polu stawiamy wieżę. W każdym ruchu można przesunąć wieżę o dowolną liczbę pól pionowo lub poziomo, przy dodatkowym warunku, że każdy ruch jest wykonywany w kierunku obróconym o 90° zgodnie z ruchem wskazówek zegara w stosunku do poprzedniego ruchu (np. po ruchu w lewo, następny ruch odbywa się w górę, następny w prawo, itd.). Dla jakich wartości m i n wieża może odwiedzić każde pole planszy dokładnie raz i powrócić na wyjściowe pole? (Przyjmujemy, że wieża odwiedza tylko te pola, na których stanie, a nie te, nad którymi jest przesuwana.)

7. Na płaszczyźnie rysujemy n wypukłych czworokątów. Dzielą one płaszczyznę na obszary (jeden z obszarów jest nieskończony). Wyznaczyć możliwie największą liczbę tych obszarów.

8. Niech P będzie zbiorem $n \geqslant 3$ punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie są współliniowe. Na ile sposobów można wybrać zbiór T złożony z $\binom{n-1}{2}$ trójkątów o wierzchołkach należących do P, o tej własności, że każdy trójkąt należący do T posiada bok nie będący bokiem żadnego innego trójkąta należącego do T?

9. Dwaj magicy pokazują następującą sztuczkę. Pierwszy magik wychodzi z pokoju. Drugi magik bierze talię 100 kart ponumerowanych liczbami $1, 2, \ldots, 100$ i prosi trzech widzów, aby wybrali kolejno po jednej karcie. Drugi magik widzi jaką kartę wybrał każdy z widzów. Potem dodaje im jeszcze jedną kartę z reszty talii. Widzowie tasują te 4 karty, wzywają pierwszego magika i dają mu je. Pierwszy magik patrzy na nie i "zgaduje" jaką kartę wybrał pierwszy widz, jaką drugi, a jaką trzeci. Udowodnić, że magicy mogą wykonać tę sztuczkę.

10. Niech N będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dwie osoby grają w następującą grę. Pierwszy gracz pisze listę niekoniecznie różnych liczb całkowitych dodatnich nie większych niż 25, których suma wynosi co najmniej 200. Drugi gracz zwycięża, jeśli może spośród nich wybrać pewne liczby tak, aby ich suma S spełniała warunek $200 - N \leqslant S \leqslant 200 + N$. Jaka jest najmniejsza wartość N, dla której drugi gracz posiada wygrywającą strategię?

11. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Rozważmy n punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie są współliniowe oraz żadne dwie odległości pomiędzy nimi nie są równe. Jeden po drugim, każdy z punktów łączymy odcinkami z dwoma punktami leżącymi najbliżej niego (jeśli istnieją już inne odcinki poprowadzone do danego punktu, nie usuwamy ich). Udowodnić, że nie istnieje punkt z którego odcinki są poprowadzone do więcej niż 11 punktów.

12. Dany jest zbiór S złożony z czterech różnych punktów na płaszczyźnie. Wiadomo, że dla każdego punktu $X \in S$ pozostałe punkty można w taki sposób nazwać Y, Z i W, że

$$|XY| = |XZ| + |XW|.$$

Udowodnić, że wszystkie cztery punkty leżą na jednej prostej.

13. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym, w którym $\angle BAC > \angle BCA$ i niech D będzie takim punktem na boku AC, że $|AB| = |BD|$. Ponadto, niech F będzie takim punktem na okręgu opisanym na trójkącie ABC, że prosta FD jest prostopadła do boku BC oraz punkty F, B leżą po różnych stronach prostej AC. Udowodnić, że prosta FB jest prostopadła do boku AC.

14. Niech L, M i N będą takimi punktami odpowiednio na bokach AC, AB i BC trójkąta ABC, że BL jest dwusieczną kąta ABC oraz odcinki AN, BL i CM mają punkt wspólny. Udowodnić, że jeśli $\angle ALB = \angle MNB$, to $\angle LNM = 90°$.

15. Pająk i mucha siedzą na sześcianie. Mucha chce zmaksymalizować najkrótszą drogę do pająka po powierzchni sześcianu. Czy najlepszym punktem dla muchy jest punkt przeciwległy do pająka? ("Przeciw-
legły" oznacza "symetryczny względem środka sześcianu".)

16. Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite nieujemne m, że

$$a_m = \left(2^{2m+1}\right)^2 + 1$$

jest podzielne przez co najwyżej dwie różne liczby pierwsze.

17. Udowodnić, że ciąg

$$\binom{2002}{2002}, \binom{2003}{2002}, \binom{2004}{2002}, \dots ,$$

jest okresowy modulo 2002.

18. Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite $n > 1$, że każdy pierwszy dzielnik liczby $n^6 - 1$ jest dzielnikiem liczby $(n^3 - 1)(n^2 - 1)$.

19. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dowieść, że równanie

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3n$$

nie ma rozwiązań w liczbach wymiernych dodatnich.

20.Czy istnieje nieskończony, różny od stałego ciąg arytmetyczny, którego każdy wyraz jest postaci a^b, gdzie a i b są liczbami całkowitymi dodatnimi oraz $b \geqslant 2$?