XIV Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich

Ryga (Łotwa), 2 listopada 2003

Treści zadań

Zadanie 1.

Niech $\mathbb{Q}_+$ będzie zbiorem liczb wymiernych dodatnich. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$ spełniające

(i) $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$,

(ii) $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) f(x) = f(x+1)$

dla każdego $x \in \mathbb{Q}_+$.

Zadanie 2.

Udowodnić, że dowolne rzeczywiste rozwiązanie równania

$$x^3 + px + q = 0$$

spełnia nierówność $4qx \leqslant p^2$.

Zadanie 3.

Niech x, y i z będą takimi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, że $xyz = 1$. Udowodnić, że

$$(1+x)(1+y)(1+z) \geqslant 2\left(1 + \sqrt[3]{\frac{y}{x}} + \sqrt[3]{\frac{z}{y}} + \sqrt[3]{\frac{x}{z}}\right).$$

Zadanie 4.

Niech a, b, c będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Udowodnić, że

$$\frac{2a}{a^2+bc} + \frac{2b}{b^2+ca} + \frac{2c}{c^2+ab} \leqslant \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}.$$

Zadanie 5.

Ciąg (a_n) jest zdefiniowany następująco: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = 2$ oraz $a_{n+1} = a_n a_{n-1}^2$ dla $n \geqslant 2$. Udowodnić, że dla każdego $n \geqslant 1$ mamy

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) < (2+\sqrt{2})a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n.$$

Zadanie 6.

Niech $n \geqslant 2$ i $d \geqslant 1$ będą takimi liczbami całkowitymi, że $d \mid n$ i niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$. Dowieść, że istnieje co najmniej $\binom{n-1}{d-1}$ możliwości wyboru d indeksów $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_d \leqslant n$ takich, że $x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_d} \geqslant 0$.

Zadanie 7.

Niech X będzie podzbiorem zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 10\,000\}$ o następującej własności: jeśli $a, b \in X$, $a \neq b$, to $a \cdot b \notin X$. Jaka jest największa możliwa liczba elementów zbioru X?

Zadanie 8.

Na stole znajdują się 2003 ciastka. Dwóch graczy wykonuje ruchy jeden po drugim. Ruch polega na zjedzeniu jednego ciastka lub połowy ciastek znajdujących się na stole (części całkowitej połowy wszystkich ciastek, jeśli jest ich nieparzysta liczba); co najmniej jedno ciastko musi zostać zjedzone w każdym ruchu. Przegrywa ten, kto zje ostatnie ciastko. Dla którego gracza — pierwszego czy drugiego — istnieje strategia wygrywająca?

Zadanie 9.

Wiadomo, że n jest liczbą całkowitą dodatnią, $n \leqslant 144$. Można zadać dziesięć pytań typu „Czy n jest mniejsze niż a?". Odpowiedzi udziela się z opóźnieniem: odpowiedź na i-te pytanie jest udzielana dopiero po zadaniu $(i+1)$-go pytania, $i = 1, 2, \ldots, 9$. Odpowiedź na 10-te pytanie zostaje udzielona od razu. Znaleźć strategię pozwalającą wyznaczyć n.

Zadanie 10.

Punkt kratowy na płaszczyźnie jest to punkt o obu współrzędnych całkowitych. *Środkiem ciężkości* czterech punktów (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4$, jest punkt

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}\right).$$

Niech n będzie największą liczbą naturalną o następującej własności: istnieje n takich różnych punktów kratowych na płaszczyźnie, że środek ciężkości każdych czterech z nich (parami różnych) nie jest punktem kratowym. Dowieść, że $n = 12$.

Zadanie 11.

Czy można wybrać na płaszczyźnie 1000 punktów w ten sposób, by istniało co najmniej 6000 różnych par punktów, pomiędzy którymi jest taka sama odległość?

Zadanie 12.

Dany jest kwadrat $ABCD$. Niech M będzie takim punktem wewnętrznym boku BC, a N takim punktem wewnętrznym boku CD, że $|\sphericalangle MAN| = 45°$. Udowodnić, że środek okręgu opisanego na trójkącie AMN leży na prostej AC.

Zadanie 13.

Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $BC = 2 \cdot AB$. Niech E będzie środkiem boku BC, a P dowolnym punktem wewnętrznym boku AD. Niech F i G będą rzutami prostopadłymi odpowiednio punktu A na $\overline{BP}$ i punktu D na $\overline{CP}$. Udowodnić, że E, F, P, G leżą na jednym okręgu.

Zadanie 14.

Na bokach trójkąta ABC, na zewnątrz tego trójkąta, zbudowano trójkąty równoboczne AMB, BNC, CKA. Przez środek odcinka MN poprowadzono prostopadłą do boku AC; analogicznie przez środek odcinka NK (odpowiednio KM) poprowadzono prostopadłą do AB (odpowiednio BC). Udowodnić, że te trzy prostopadłe przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 15.

Przekątne AC i BD czworokąta wpisanego w okrąg przecinają się w punkcie P. Okrąg przechodzący przez P, styczny do boku CD w jego środku M, przecina odcinki BD i AC odpowiednio w punktach Q i R. Niech S będzie takim punktem odcinka BD, że $BS = DQ$. Prosta przechodząca przez S równoległa do AB przecina AC w punkcie T. Wykazać, że $AT = RC$.

Zadanie 16.

Wyznaczyć wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych (a, b), że $a - b$ jest liczbą pierwszą i ab jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 17.

Wszystkie dodatnie dzielniki liczby całkowitej dodatniej n, uporządkowane rosnąco, są przechowywane w tablicy. Marysia ma napisać program decydujący o tym, czy wybrany dzielnik $d > 1$ jest liczbą pierwszą. Przyjmijmy, że n ma k dzielników nie przekraczających d. Marysia twierdzi, że wystarczy sprawdzić podzielność d przez pierwsze $\lceil k/2 \rceil$ dzielników n: jeśli wśród nich znajduje się dzielnik d większy niż 1, to d jest liczbą złożoną, w przeciwnym razie d jest liczbą pierwszą. Czy Marysia ma rację?

Zadanie 18.

Każda liczba całkowita została pomalowana na dokladnie jeden z kolorów: niebieski, zielony, czerwony, żółty. Czy jest możliwe takie pomalowanie, że jeśli liczby a, b, c, d nie wszystkie są równe zero i mają ten sam kolor, to $3a - 2b \neq 2c - 3d$?

Zadanie 19.

Niech a i b będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Udowodnić, że jeśli $a^3 + b^3$ jest kwadratem liczby całkowitej, to $a + b$ nie jest iloczynem dwóch różnych liczb pierwszych.

Zadanie 20.

Niech n będzie taką liczbą całkowitą dodatnią, że suma wszystkich dodatnich dzielników liczby n (oprócz n) plus liczba tych dzielników jest równa n. Udowodnic, że $n = 2m^2$ dla pewnej liczby całkowitej m.