XV Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich
Wilno (Litwa), 7 listopada 2004

Treści zadań

Zadanie 1.
Ciąg $a_1, a_2, a_3, \ldots$ liczb rzeczywistych spełnia dla $n = 1, 2, \ldots$ warunki

$$a_n + a_{2n} \geqslant 3n \qquad \text{oraz} \qquad a_{n+1} + n \leqslant 2\sqrt{a_n \cdot (n+1)}.$$

(a) Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $a_n \geqslant n$.
(b) Podać przykład takiego ciągu.

Zadanie 2.
Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach nieujemnych. Udowodnić, że jeżeli

$$P\Big(\frac{1}{x}\Big) \cdot P(x) \geqslant 1 \qquad \text{dla } x = 1,$$

to nierówność ta jest spełniona dla dowolnej liczby dodatniej x.

Zadanie 3.
Niech p, q, r będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi, $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że jeśli $pqr = 1$, to

$$\frac{1}{p^n + q^n + 1} + \frac{1}{q^n + r^n + 1} + \frac{1}{r^n + p^n + 1} \leqslant 1.$$

Zadanie 4.
Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą liczbami rzeczywistymi o średniej arytmetycznej X. Udowodnić, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia K, że średnia arytmetyczna każdego z multizbiorów $\{x_1, x_2, \ldots, x_K\}$, $\{x_2, x_3, \ldots, x_K\}$, $\{x_3, \ldots, x_K\}$, $\ldots$, $\{x_{K-1}, x_K\}$, $\{x_K\}$ jest nie większa niż X.

Zadanie 5.
Wyznaczyć zbiór wartości następującej funkcji zdefiniowanej dla liczb całkowitych k:

$$f(k) = (k)_3 + (2k)_5 + (3k)_7 - 6k,$$

gdzie $(k)_{2n+1}$ oznacza wielokrotność $2n+1$ najbliższą k.

Zadanie 6.
Na każdej ścianie sześcianu napisano liczbę całkowitą dodatnią. Dla każdego wierzchołka sześcianu obliczamy iloczyn liczb znajdujących się na trzech ścianach zawierających ten wierzchołek. Suma tych iloczynów jest równa 1001. Ile wynosi suma sześciu liczb znajdujących się na ścianach sześcianu?

Zadanie 7.
Znaleźć wszystkie zbiory X zawierające co najmniej dwie takie liczby całkowite dodatnie, że dla dowolnych $m, n \in X$ istnieje takie $k \in X$, że $n = mk^2$.

Zadanie 8.
Niech $f(x)$ będzie różnym od stałego wielomianem o współczynnikach całkowitych. Udowodnić, że istnieje taka liczba całkowita n, że $f(n)$ ma co najmniej 2004 różnych dzielników pierwszych.

Zadanie 9.

Dany jest zbiór S zawierający $n-1$ liczb naturalnych ($n \geqslant 3$). W S istnieją co najmniej dwa elementy, których różnica nie jest podzielna przez n. Udowodnić, że można wybrać taki niepusty podzbiór S, że suma jego elementów jest podzielna przez n.

Zadanie 10.

Czy istnieje nieskończony ciąg liczb pierwszych $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots$ taki, że $|p_{n+1} - 2p_n| = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$?

Zadanie 11.

Na każdym polu planszy $m \times n$ napisano liczbę $+1$ lub -1. Wiadomo, że początkowo na planszy znajduje się dokładnie jedno -1, każda z pozostałych liczb to $+1$. W jednym ruchu możemy wybrać dowolne pole zawierające -1, zamienić to -1 na 0 i jednocześnie pomnożyć wszystkie liczby znajdujące się na sąsiednich polach przez -1 (powiemy, że dwa pola sąsiadują ze sobą, jeśli mają wspólny bok). Znaleźć wszystkie takie pary (m, n) dla których, niezależnie od tego na jakim polu znajdowało się początkowo -1, można przy pomocy tych ruchów otrzymać planszę zawierającą same zera.

Zadanie 12.

$2n$ różnych liczb znajduje się w jednym wierszu. W jednym ruchu możemy zamienić miejscami dowolne dwie liczby lub zamienić cyklicznie dowolne trzy liczby (tzn. wybrać a, b, c i na miejsce b wstawić a, na miejsce c wstawić b oraz na miejsce a wstawić c). Jaka jest najmniejsza liczba ruchów, która zawsze wystarcza by ustawić wszystkie liczby w kolejności rosnącej?

Zadanie 13.

Dwadzieścia pięć państw członkowskich Unii Europejskiej powołało komitet obradujący według następujących zasad: 1) codziennie odbywa się jedno posiedzenie komitetu; 2) na każdym posiedzeniu reprezentowane jest co najmniej jedno państwo członkowskie; 3) zbiory państw reprezentowanych na dowolnych dwóch różnych posiedzeniach są różne; 4) zbiór państw reprezentowanych na n-tym posiedzeniu zawiera dla każdego $k < n$ co najmniej jedno państwo, które było reprezentowane na k-tym posiedzeniu. Przez ile dni mogą odbywać się posiedzenia komitetu?

Zadanie 14.

Powiemy, że *kupka* jest zbiorem czterech lub więcej orzechów. Dwie osoby grają w następującą grę. Początkowo mają jedną kupkę $n \geqslant 4$ orzechów. W każdym ruchu gracz bierze jedną z kupek i rozdziela ją na dwa niepuste zbiory (te zbiory nie muszą być kupkami, mogą zawierać dowolną liczbę orzechów). Przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu. Dla jakich wartości n istnieje strategia wygrywająca dla pierwszego gracza?

Zadanie 15.

Okrąg podzielono na 13 łuków ponumerowanych kolejnymi liczbami od 1 do 13. Pięć pcheł: A, B, C, D, E siedzi na łukach $1, 2, 3, 4, 5$. Pchła może skoczyć na pusty łuk odległy o pięć miejsc w dowolnym kierunku wzdłuż okręgu. Żadne dwie pchły nie mogą naraz znaleźć się na tym samym łuku. Po pewnej liczbie skoków pchły znalazły się ponownie na łukach $1, 2, 3, 4, 5$, być może w innej kolejności niż na początku. W jakich kolejnościach mogły się wówczas znaleźć?

Zadanie 16.

Przez punkt P leżący na zewnątrz danego okręgu poprowadzono sieczną i styczną do tego okręgu. Sieczna przecina okrąg w punktach A i B, a styczna jest styczna do okręgu w punkcie C leżącym po tej samej stronie prostej zawierającej średnicę i punkt P, co punkty A i B. Punkt Q jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą zawierającą średnicę i punkt P. Udowodnić, że QC jest dwusieczną kąta AQB.

Zadanie 17.

Rozważmy prostokąt o bokach długości 3 i 4 oraz na każdym jego boku wybierzmy dowolny punkt wewnętrzny. Niech x, y, z, u oznaczają długości boków czworokąta wyznaczonego przez te punkty. Udowodnić, że $25 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leqslant 50$.

Zadanie 18.

Półprosta poprowadzona z wierzchołka A trójkąta ABC przecina bok BC w punkcie X, a okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie Y. Udowodnić, że $\frac{1}{AX} + \frac{1}{XY} \geqslant \frac{4}{BC}$.

Zadanie 19.

W danym trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku BC. M jest takim punktem na boku BC, że $\sphericalangle BAM = \sphericalangle DAC$. Okrąg opisany na trójkącie CAM przecina bok AB w punkcie $L \neq A$. Okrąg opisany na trójkącie BAM przecina bok AC w punkcie $K \neq A$. Udowodnić, że $KL \parallel BC$.

Zadanie 20.

Trzy łuki w_1, w_2, w_3 o wspólnych końcach A i B leżą po tej samej stronie prostej AB; w_2 leży pomiędzy w_1 i w_3. Dwie półproste o początku w B przecinają te łuki odpowiednio w punktach M_1, M_2, M_3 i K_1, K_2, K_3. Udowodnić, że $\frac{M_1M_2}{M_2M_3} = \frac{K_1K_2}{K_2K_3}$.