I Zawody Matematyczne CZE–POL–SVK

Bílovec, 14–15 czerwca 2001

Zadania

1. Dowieść, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ zachodzi nierówność

$$(a_1^3+1)(a_2^3+1)\cdot\ldots\cdot(a_n^3+1) \geqslant (a_1^2a_2+1)(a_2^2a_3+1)\cdot\ldots\cdot(a_n^2a_1+1).$$

2. Trójkąt ABC ma kąty ostre przy wierzchołkach A i B. Na bokach AC i BC są na zewnątrz dorysowane trójkąty równoramienne ACD i BCE o podstawach AC i BC tak, że $\angle ADC = \angle ABC$ i jednocześnie $\angle BEC = \angle BAC$. Oznaczmy przez S środek okręgu opisanego na trójkącie ABC. Udowodnić, że długość linii łamanej DSE jest równa obwodowi trójkąta ABC wtedy i tylko wtedy, gdy kąt ACB jest prosty.

3. Dla danych liczb naturalnych n, k spełniających warunki $\frac{1}{2}n < k \leqslant \frac{2}{3}n$ znaleźć najmniejszą liczbę pól, które można zająć na kwadratowej szachownicy $n \times n$ tak, aby w żadnym wierszu ani w żadnej kolumnie szachownicy nie pozostało k wolnych (nie zajętych) sąsiednich pól.

4. Na płaszczyźnie dane są różne punkty A, B. Na tej płaszczyźnie rozpatrujemy dowolny trójkąt ABC o następujących własnościach: wewnątrz jego boków BC, CA istnieją odpowiednio punkty D, E spełniające warunki

(i) $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{CE}{CA} = \dfrac{1}{3}$;

(ii) punkty A, B, D, E leżą (w tej kolejności) na jednym okręgu.

Wyznaczyć zbiór punktów przecięcia prostych AD i BE dla wszystkich trójkątów ABC o podanych własnościach.

5. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające równanie

$$f(x^2+y) + f(f(x)-y) = 2f(f(x)) + 2y^2$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbf{R}$.

6. W przestrzeni dany jest układ współrzędnych kartezjańskich. Każdy punkt o współrzędnych całkowitych nazywamy *kratowym.* Kolorujemy 2000 punktów kratowych na niebiesko i 2000 innych punktów kratowych na czerwono tak, aby żadne dwa niebiesko-czerwone odcinki nie miały wspólnego punktu wewnętrznego. (Odcinek nazywamy *niebiesko-czerwonym*, jeżeli jeden jego punkt końcowy jest pokolorowany na niebiesko, a drugi na czerwono). Rozpatrujemy najmniejszy prostopadłościan o krawędziach równoległych do osi współrzędnych, który zawiera wszystkie pokolorowane punkty.

(a) Udowodnić, że prostopadłościan zawiera co najmniej 500000 punktów kratowych.

(b) Podać przykład opisanego pokolorowania, w którym rozpatrywany prostopadłościan zawiera co najwyżej 8000000 punktów kratowych.