# II Zawody Matematyczne CZE–POL–SVK

Zwardoń, 17–18 czerwca 2002

## Zadania

**1.** Dane są różne liczby rzeczywiste $a, b$ oraz dodatnie liczby całkowite $k, m$, przy czym $k + m = n \geqslant 3$, $k \leqslant 2m$, $m \leqslant 2k$. Rozważamy ciągi $(x_1, \ldots, x_n)$ o następujących własnościach:

$k$ wyrazów $x_i$ jest równych $a$; w szczególności $x_1 = a$;
$m$ wyrazów $x_i$ jest równych $b$; w szczególności $x_n = b$;
żadne trzy kolejne wyrazy nie są równe.

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości sumy

$$x_n x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n + x_{n-1} x_n x_1.$$

**2.** Dany jest trójkąt $ABC$ o bokach długości $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $a \leqslant b \leqslant c$, i polu $S$. Wyznaczyć największą liczbę $u$ oraz najmniejszą liczbę $v$ takie, że dla każdego punktu $P$ wewnątrz trójkąta $ABC$ zachodzi nierówność

$$u \leqslant PD + PE + PF \leqslant v,$$

gdzie $D$, $E$, $F$ są punktami przecięcia półprostych $AP$, $BP$, $CP$ z przeciwległymi bokami trójkąta.

(Szukane wartości $u$, $v$ należy wyrazić przez dane liczby $a$, $b$, $c$, $S$.)

**3.** Niech $n$ będzie ustaloną liczbą naturalną i niech $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Ile jest funkcji $f\colon S \to S$ spełniających równanie $x + f^4(x) = n + 1$ dla wszystkich $x \in S$ ?

Uwaga. Symbol $f^4$ oznacza czwartą iteratę: $f^4(x) = f(f(f(f(x))))$.

**4.** Dana jest liczba naturalna $n > 1$ oraz liczba pierwsza $p$ taka, że $p - 1$ dzieli się przez $n$, zaś $n^3 - 1$ dzieli się przez $p$. Dowieść, że $4p - 3$ jest kwadratem liczby całkowitej.

**5.** W trójkącie ostrokątnym $ABC$ punkt $O$ jest środkiem okręgu opisanego, a punkty $P$ oraz $Q$ leżą odpowiednio na bokach $AC$ oraz $BC$ i spełniają warunki

$$\frac{AP}{PQ} = \frac{BC}{AB} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{BQ}{PQ} = \frac{AC}{AB}.$$

Dowieść, że punkty $O$, $P$, $Q$ i $C$ leżą na jednym okręgu.

**6.** Niech $n \geqslant 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną parzystą. Rozważamy wszystkie wielomiany postaci

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + 1$$

o współczynnikach rzeczywistych, mające co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość sumy $a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2$.