III Zawody Matematyczne Czesko-Polsko-Słowackie

Žilina, 15–18 czerwca 2003

Teksty zadań

1. Dla danej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ rozwiązać w liczbach rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ układ równań:

$$\begin{cases} max\{1, x_1\} & = x_2 \\ max\{2, x_2\} & = 2x_3 \\ & \vdots \\ max\{n-1, x_{n-1}\} & = (n-1)x_n \\ max\{n, x_n\} & = nx_1. \end{cases}$$

2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym kąt przy wierzchołku B ma miarę większą od 45 stopni. Niech D, E, F będą spodkami wysokości opuszczonych z wierzchołków A, B, C odpowiednio i niech K będzie takim punktem odcinka AF, że $|\sphericalangle DKF| = |\sphericalangle KEF|$. Wykazać, że:

a) taki punkt K zawsze istnieje;

b) zachodzi równość $|KD|^2 = |FD|^2 + |AF| \cdot |BF|$.

3. Dla liczb p, q, r z przedziału $\langle \frac{2}{5}, \frac{5}{2} \rangle$ zachodzi równość $pqr = 1$. Udowodnić, że istnieją dwa trójkąty o równych polach takie, że jeden z nich ma boki o długościach a, b, c, a drugi ma boki o długościach pa, qb, rc.

4. Dany jest trójkąt ABC i jego punkt wewnętrzny P, który leży na środkowej wychodzącej z wierzchołka C. Oznaczmy przez X punkt przecięcia prostej AP z prostą BC, a przez Y punkt przecięcia prostej BP z prostą AC. Udowodnić, że jeśli czworokąt $ABXY$ jest wpisany w okrąg, to trójkąt ABC jest równoramienny.

5. Znaleźć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 2$, dla których wszystkie współczynniki

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}$$

są liczbami parzystymi.

6. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ spełniają równanie

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x).$$