Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne
(Zwardoń, 22–26 czerwca 2008 r.)

Zawody indywidualne – pierwszy dzień, 23 czerwca 2008 r.

1. Wyznaczyć wszystkie trójki (x,y,z) dodatnich liczb rzeczywistych spełniające układ równań

$$\begin{cases} 2x^3 = 2y(x^2+1) - (z^2+1) \\ 2y^4 = 3z(y^2+1) - 2(x^2+1) \\ 2z^5 = 4x(z^2+1) - 3(y^2+1) \end{cases}$$

2. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym $\angle A = \angle C = \angle E$ oraz $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Wykazać, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

3. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba

$$\binom{p}{1}^2 + \binom{p}{2}^2 + \ldots + \binom{p}{p-1}^2$$

jest podzielna przez p^3.

Czas na rozwiązywanie: 4 godziny 30 minut.
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.

Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne
(Zwardoń, 22–26 czerwca 2008 r.)

Zawody indywidualne – drugi dzień, 24 czerwca 2008 r.

4. Dowieść, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że dla każdej liczby całkowitej k liczba k^2+k+n nie ma dzielników pierwszych mniejszych od 2008.

5. Dany jest pięciokąt foremny $ABCDEF$. Wyznaczyć najmniejszą wartość wyrażenia

$$\frac{PA+PB}{PC+PD+PE},$$

gdzie P jest dowolnym punktem leżącym w płaszczyźnie pięciokąta $ABCDE$.

6. Wyznaczyć wszystkie trójki (k,m,n) liczb całkowitych dodatnich o następującej własności:

Kwadrat o boku m można rozciąć na pewną liczbę prostokątów o wymiarach $1\times k$ oraz dokładnie jeden kwadrat o boku n.

Czas na rozwiązywanie: 4 godziny 30 minut.
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.

Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne
(Zwardoń, 22–26 czerwca 2008 r.)

Soutěž družstev (25. červen 2008)

1. Rozhodněte, zda existuje nekonečně mnoho trojic (a,b,c) přirozených čísel takových, že $\mathrm{NSD}(a,b,c)=1$ a přitom čísla

$$\frac{a^3-b^3-c^3}{3}, \qquad \frac{a^5-b^5-c^5}{5}, \qquad \frac{a^7-b^7-c^7}{7}$$

tvoří (v tomto pořadí) první tři členy geometrické posloupnosti.

Uwaga. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po słowacku.

2. Niech $a_1,a_2,\ldots,a_{100}$ będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{100}^2=1$.

(a) Wykazać, że

$$a_1^2a_2+a_2^2a_3+\ldots+a_{100}^2a_1<\frac{12}{25}\ .$$

(b) Znaleźć taką stałą $c<12/25$, że nierówność

$$a_1^2a_2+a_2^2a_3+\ldots+a_{100}^2a_1<c$$

jest prawdziwa dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych $a_1,a_2,\ldots,a_{100}$ spełniających warunek $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{100}^2=1$.

(Im mniejsza stała c, tym lepszą ocenę można otrzymać.)

Poznámka. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané v češtine.

3. Bod P leží na strane AB konvexného štvoruholníka $ABCD$. Nech ω je kružnica so stredom I vpísaná do trojuholníka CDP. Predpokladajme, že kružnica ω sa dotýka kružníc vpísaných trojuholníkom ADP a BCP postupne v bodoch K a L. Priamky AC a BD sa pretínajú v bode E a priamky AK a BL v bode F. Dokážte, že body E, I a F ležia na jednej priamke.

Poznámka. Řešení této úlohy odevzdejte v polském jazyce.

Vymezený čas: do 13:00.
Každá úloha je hodnocena nejvýše 7 body.