Zawody indywidualne

Zadanie I–1

Niech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem liczb całkowitych dodatnich takim, że $a_n < a_{n+1}$ dla każdego $n \geq 1$. Zakładamy, że dla każdej czwórki indeksów (i, j, k, l), gdzie $1 \leq i < j \leq k < l$ oraz $i + l = j + k$, zachodzi nierówność $a_i + a_l > a_j + a_k$. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość a_{2008}.

Zadanie I–2

Rozważmy szachownicę o wymiarach $n \times n$, gdzie $n > 1$ jest liczbą naturalną. Na ile sposobów można rozmieścić na niej $2n-2$ identycznych pionków (każdy na innym polu), w ten sposób, że żadne dwa nie leżą na tej samej przekątnej szachownicy?

(Mówimy, że dwa pionki leżą na tej samej przekątnej szachownicy, jeżeli odcinek łączący środki odpowiadających im pól jest równoległy do jednej z głównych przekątnych szachownicy.)

Zadanie I–3

Niech ABC będzie trójkątem równoramiennym, w którym $|AC| = |BC|$. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków AB i BC odpowiednio w punktach D i E. Prosta (różna od AE) przechodzi przez punkt A i przecina okrąg wpisany w punktach F i G. Prosta AB przecina proste EF i EG, odpowiednio, w punktach K i L. Udowodnić, że $|DK| = |DL|$.

Zadanie I–4

Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite k takie, że dla każdej liczby całkowitej n, liczby $4n + 1$ i $kn + 1$ są względnie pierwsze.

Maksymalna nota za każde zadanie wynosi 8 punktów.

Czas zawodów: 5 godzin.

Czas na pytania: 45 minut.

Zawody drużynowe

Zadanie T–1

Niech $\mathbb{R}$ oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że

$$xf(x + xy) = xf(x) + f(x^2)f(y)$$

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie T–2

Niech $n \geq 2$ będzie liczbą naturalną. Na tablicy napisaliśmy n liczb naturalnych. W każdym kroku wybieramy dwie z liczb napisanych na tablicy i zastępujemy każdą z nich przez ich sumę. Wyznaczyć wszystkie wartości n, dla których zawsze można otrzymać n takich samych liczb po skończonej liczbie kroków.

Zadanie T–3

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Niech E będzie punktem takim, że B i E leżą po przeciwnych stronach prostej AC i niech D będzie punktem wewnętrznym odcinka AE. Zakładamy, że $\angle ADB = \angle CDE$, $\angle BAD = \angle ECD$ i $\angle ACB = \angle EBA$. Udowodnić, że punkty B, C i E są współliniowe.

Zadanie T–4

Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnić, że jeżeli suma wszystkich dodatnich dzielników n jest potęgą liczby 2, to liczba dzielników n jest też potęgą liczby 2.