XXI Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna
Londyn (Wielka Brytania), 2–3 lipca 1979

Teksty zadań

1. Niech p i q będą takimi liczbami naturalnymi, że
$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$
Udowodnić, że liczba p jest podzielna przez 1979.

2. Dany jest graniastosłup, którego podstawami są pięciokąty $A_1A_2A_3A_4A_5$ i $B_1B_2B_3B_4B_5$. Wszystkie boki tych pięciokątów i wszystkie odcinki $\overline{A_iB_j}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, 5)$ są pomalowane na czerwono lub zielono. Wiadomo, że każdy trójkąt, którego wierzchołki są wierzchołkami graniastosłupa i którego wszystkie boki są pomalowane, ma dwa boki różnych kolorów. Udowodnić, że wszystkie 10 boków obydwu podstaw zostało pomalowanych tym samym kolorem.

3. Na płaszczyźnie dane są dwa przecinające się okręgi. Niech A będzie jednym z punktów przecięcia. Dwa punkty startują równocześnie z punktu A i poruszają się ze stałymi prędkościami, każdy po innym okręgu, wyznaczając tę samą orientację. Po jednym okrążeniu punkty wracają równocześnie do punktu A. Udowodnić, że istnieje na płaszczyźnie stały punkt P, którego odległości od poruszających się punktów są w każdym momencie równe.

4. Dana jest płaszczyzna π, punkt P na niej i punkt Q poza nią. Znaleźć wszystkie punkty R płaszczyzny π, dla których stosunek $(QP + PR)/QR$ jest największy.

5. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste a, dla których istnieją liczby nieujemne x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 spełniające równania
$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^3x_k = a, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^5x_k = a.$$

Niech A i E będą przeciwległymi wierzchołkami ośmiokąta foremnego. Żaba zaczyna skakać z wierzchołka A. Z każdego wierzchołka ośmiokąta różnego od E może ona skoczyć do każdego z sąsiednich wierzchołków. Gdy żaba znajdzie się w punkcie E, przestaje skakać.

Niech a_n będzie liczbą różnych dróg z A do E złożonych z n skoków. Udowodnić, że
$$a_{2n-1} = 0, \qquad a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1}), \qquad n = 1, 2, 3 \ldots,$$
gdzie $x = 2 + \sqrt{2}$, $y = 2 - \sqrt{2}$.

Uwaga. Drogą z A do E złożoną z n skoków jest każdy ciąg wierzchołków ośmiokąta $(P_0, \ldots, P_n)$, w którym

(i) $P_0 = A$, $P_n = E$;

(ii) dla każdego i takiego, że $0 \leqslant i \leqslant n-1$ punkt P_i jest różny od E;

(iii) dla każdego i takiego, że $0 \leqslant i \leqslant n-1$ punkty P_i oraz P_{i+1} są sąsiednimi wierzchołkami ośmiokąta.