XXIII Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna

Budapeszt (Węgry), 9–10 lipca 1982

Teksty zadań

1. Funkcja f określona jest dla wszystkich liczb naturalnych i przyjmuje wartości całkowite nieujemne. Wiadomo, że f spełnia warunki

(i) dla dowolnych m i n
$$f(m+n) - f(m) - f(n)$$
przyjmuje wartość 0 lub 1,

(ii) $f(2) = 0, \quad f(3) > 0, \quad f(9999) = 3333.$

Wyznaczyć $f(1982)$.

2. Dany jest trójkąt nierównoramienny $A_1A_2A_3$. Niech a_i będzie jego bokiem leżącym naprzeciw wierzchołka A_i $(i = 1, 2, 3)$, M_i — środkiem boku a_i, T_i — punktem styczności boku a_i z okręgiem wpisanym w dany trójkąt oraz S_i — obrazem T_i w symetrii względem dwusiecznej kąta A_i danego trójkąta. Udowodnić, że proste $M_1S_1,\ M_2S_2,\ M_3S_3$ mają punkt wspólny.

3. Rozważamy nieskończone ciągi (x_n) liczb dodatnich mające następujące własności: $x_0 = 1$ oraz dla każdego $i \geqslant 0$ jest $x_{i+1} \leqslant x_i$.

(a) Udowodnić, że dla każdego takiego ciągu istnieje takie $n \geqslant 1$, że
$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geqslant 3{,}999.$$

(b) Znaleźć taki ciąg x_n, że dla każdego n
$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4.$$

4. Udowodnić, że jeżeli n jest taką liczbą całkowitą dodatnią, że równanie $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych (x, y), to ma ono co najmniej trzy takie rozwiązania. Wykazać, że równanie to dla $n = 2891$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

5. Na przekątnych $\overline{AC}$ i $\overline{CE}$ sześciokąta foremnego $ABCDEF$ wybrano punkty M i N odpowiednio w ten sposób, że
$$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r.$$
Wiadomo, że punkty B, M i N leżą na jednej prostej. Wyznaczyć r.

6. Dany jest kwadrat S o boku długości 100. Niech $L = A_0A_1\ldots A_n$ $(A_0 \neq A_n)$ będzie łamaną bez samoprzecięć zawartą w S i taką, że dla dowolnego punktu p brzegu kwadratu S istnieje punkt łamanej L, którego odległość od punktu P jest nie większa od $\frac{1}{2}$. Udowodnić, że na łamanej L istnieją takie dwa punkty X i Y, że odległość między nimi jest nie większa od 1, a długość części łamanej, zawartej między punktami X i Y, jest nie mniejsza od 198.