XXV Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna
Czechosłowacja, lipiec 1984

Teksty zadań

1. Udowodnić, że $0 \leqslant yz + zx + xy - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}$, gdzie x, y, z są liczbami rzeczywistymi nieujemnymi, dla których $x + y + z = 1$.

2. Znaleźć parę takich liczb dodatnich a, b, że

(i) liczba $ab(a + b)$ nie jest podzielna przez 7,

(ii) liczba $(a + b)^7 - a^7 - b^7$ jest podzielna przez 7^7. Odpowiedź uzasadnić.

3. Na płaszczyźnie dane są dwa różne punkty O i A. Dla każdego punktu X tej płaszczyzny, różnego od punktu O, oznaczamy przez $a(X)$ miarę kąta AOX w radianach ($0 \leqslant a(X) < 2\pi$), gdzie kąt AOX mierzymy od półprostej $OA^{\rightarrow}$ w kierunku przeciwnym kierunkowi ruchu wskazówek zegara, przez $C(X)$ zaś okrąg o środku O i promieniu $OX + \frac{a(X)}{OX}$. Dany jest skończony zbiór kolorów i każdy punkt płaszczyzny jest pokolorowany jednym z nich. Udowodnić, że istnieje taki punkt Y, że $a(Y) > 0$ i na okręgu $C(Y)$ istnieje co najmniej jeden punkt tego samego koloru co punkt Y.

4. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym, w którym prosta CD jest styczna do okręgu o średnicy $\overline{AB}$. Udowodnić, że prosta AB jest styczna do okręgu o średnicy $\overline{CD}$ wtedy i tylko wtedy, gdy proste BC i AD są równoległe.

5. Niech d będzie sumą długości wszystkich przekątnych płaskiego n-kąta wypukłego ($n > 3$) i niech p będzie jego obwodem. Udowodnić, że

$$n - 3 < \frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right] - 2.$$

6. Niech a, b, c, d będą takimi liczbami całkowitymi nieparzystymi, że $0 < a < b < c < d$ i $ad = bc$. Udowodnić, że jeżeli dla pewnych liczb całkowitych k i m jest $a + d = 2^k$ i $b + c = 2^m$, to $a = 1$.