XXVI Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna
Finlandia, 4–5 lipca 1985

Teksty zadań

1. Wierzchołki czworokąta wypukłego $ABCD$ leżą na okręgu. Inny okrąg ma środek na boku AB i jest styczny do pozostałych trzech boków. Udowodnić, że $|AD| + |BC| = |AB|$.

2. Dane są względnie pierwsze liczby całkowite n i k ($0 < k < n$). Każdą z liczb zbioru $M = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ maluje się albo na niebiesko, albo na biało w ten sposób, że

(i) dla każdego i ze zbioru M liczby i oraz $n-i$ maluje się tym samym kolorem,

(ii) dla każdego i ze zbioru M, różnego od k, liczby i oraz $k-i$ maluje się tym samym kolorem.

Udowodnić, że wszystkie liczby ze zbioru M zostaną pomalowane tym samym kolorem.

3. Dla dowolnego wielomianu $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k$ o współczynnikach całkowitych przez $w(P)$ oznaczamy liczbę współczynników tego wielomianu, które są liczbami nieparzystymi. Niech $Q_i(x) = (1+x)^i$ dla $i = 0, 1, 2, \ldots$. Udowodnić, że jeśli liczby całkowite $i_1, i_2, \ldots, i_n$ spełniają nierówności $0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_n$, to
$$W(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \ldots + Q_{i_n}) \geqslant W(Q_{i_1}).$$

4. Dany jest zbiór M złożony z 1985 różnych liczb naturalnych, z których żadna nie dzieli się przez liczbę pierwszą większą od 26. Udowodnić, że ze zbioru M można wybrać cztery (parami różne) liczby, których iloczyn jest czwartą potęgą liczby całkowitej.

5. Dany jest trójkąt ABC i okrąg o środku O przechodzący przez wierzchołki A i C, przecinający ponadto odpowiednio odcinki AB i BC w różnych punktach K i N. Okręgi opisane na trójkątach ABC i KBN mają dokładnie dwa punkty wspólne B i M. Udowodnić, że kąt OMB jest prosty.

6. Dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x_1 konstruujemy ciąg $x_1, x_2, \ldots$ przyjmując
$$x_{n+1} = x_n\left(x_n + \frac{1}{n}\right)$$
dla każdego $n \geqslant 1$. Udowodnić, że istnieje dokładnie jedna wartość x_1, dla której nierówności $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ zachodzą dla każdego n.