XXVII Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna

Warszawa, 9–10 lipca 1986

Teksty zadań

1. Niech d będzie dowolną dodatnią liczbą całkowitą różną od 2, 5 i 13. Udowodnić, że w zbiorze $\{2, 5, 13, d\}$ można tak wybrać dwa różne elementy a, b, by $ab - 1$ nie było kwadratem liczby naturalnej.

2. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt $A_1A_2A_3$ i punkt P_0. Definiujemy $A_s = A_{s-3}$ dla wszystkich $s \geqslant 4$. Konstruujemy ciąg punktów $P_0, P_1, \ldots$ tak, że P_{k+1} jest obrazem P_k przy obrocie wokół punktu A_{k+1} $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. o $120°$ w kierunku ruchu wskazówek zegara. Udowodnić, że jeżeli $P_{1986} = P_0$, to trójkąt $A_1A_2A_3$ jest równoboczny.

3. Każdemu wierzchołkowi pięciokąta foremnego przyporządkowana jest liczba całkowita w taki sposób, że suma wszystkich pięciu liczb jest dodatnia. Jeśli trzem kolejnym wierzchołkom przyporządkowane są odpowiednio liczby x, y, z i $y < 0$, to następująca operacja jest dopuszczalna: liczby x, y, z zastępujemy odpowiednio liczbami $x+y,\ -y,\ z+y$. Powtarzamy tę operację dopóty, dopóki co najmniej jedna z pięciu liczb jest ujemna. Rozstrzygnąć, czy ten proces koniecznie musi się zakończyć po skończonej liczbie kroków.

4. Niech A i B będą kolejnymi wierzchołkami n-kąta foremnego $(n \geqslant 5)$ o środku O położonego na płaszczyźnie. Trójkąt XYZ, który jest przystający do OAB i który zajmuje początkowo pozycję OAB, porusza się na płaszczyźnie tak, że każdy z punktów Y, Z przebiega cały brzeg wielokąta, a X pozostaje wewnątrz wielokąta. Jaką figurą jest zbiór wszystkich punktów X?

5. Znaleźć wszystkie takie funkcje f określone na zbiorze nieujemnych liczb rzeczywistych i o wartościach rzeczywistych nieujemnych, że

(i) $f\big(xf(y)\big) \cdot f(y) = f(x + y)$ dla wszystkich $x, y \geqslant 0$,

(ii) $f(2) = 0$,

(iii) $f(x) \neq 0$ dla $0 \leqslant x < 2$.

6. Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór punktów o współrzędnych całkowitych. Czy można pokolorować pewne punkty tego zbioru na czerwono, a pozostałe na biało, w taki sposób, że dla każdej prostej L równoległej do jednej z osi współrzędnych bezwzględna wartość różnicy pomiędzy liczbą punktów białych i czerwonych leżących na L jest nie większa od 1? Uzasadnić swoją odpowiedź.