XXIX Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna

Canberra (Australia), 15–16 lipca 1988

Teksty zadań

1. Na płaszczyźnie dane są dwa okręgi mające ten sam środek i promienie długości R i r ($R > r$). P jest ustalonym punktem na mniejszym okręgu, a B zmiennym punktem przebiegającym większy okrąg. Prosta BP przecina większy okrąg w punktach B i C. Prosta l prostopadła do BP i przechodząca przez P przecina mniejszy okrąg w punktach A i P (w przypadku, gdy l jest styczna do okręgu w punkcie P, przyjmujemy $A = P$).

(a) Wyznaczyć zbiór wartości wyrażenia $|BC|^2 + |CA|^2 + |AB|^2$.

(b) Wyznaczyć zbiór środków odcinków AB.

2. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią, natomiast $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ — podzbiorami zbioru B. Zakładamy, że

(i) do każdego zbioru A_i należy dokładnie $2n$ elementów,

(ii) do każdego zbioru $A_i \cap A_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 2n+1)$ należy dokładnie jeden element,

(iii) każdy element zbioru B należy do co najmniej dwóch zbiorów A_i.

Dla jakich wartości n można przyporządkować każdemu elementowi zbioru B jedną z liczb $0, 1$ w taki sposób, że w każdym ze zbiorów A_i liczba 0 jest przyporządkowana dokładnie n jego elementom?

3. Funkcja f jest określona w zbiorze liczb całkowitych dodatnich przez warunki:

$$f(1) = 1, \quad f(3) = 3$$

oraz

$$\begin{aligned} f(2n) &= f(n) \\ f(4n+1) &= 2f(2n+1) - f(n) \\ f(4n+3) &= 3f(2n+1) - 2f(n) \end{aligned}$$

dla wszystkich całkowitych dodatnich n.

Wyznaczyć liczbę tych liczb całkowitych dodatnich n, mniejszych lub równych 1988, dla których $f(n) = n$.

4. Udowodnić, że zbiór liczb rzeczywistych x spełniających nierówność

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqslant \frac{5}{4}$$

jest sumą rozłącznych przedziałów, których suma długości jest równa 1988.

5. W trójkącie prostokątnym ABC ($|\sphericalangle A| = 90^\circ$) punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A. Prosta przechodząca przez środki okręgów wpisanych w trójkąty ABD i ACD przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach K i L. Wykazać, że jeżeli pole trójkąta ABC równe jest S, a pole trójkąta AKL jest równe T, to $S \geqslant 2T$.

6. Niech a i b będą takimi liczbami całkowitymi dodatnimi, że liczba $a^2 + b^2$ jest podzielna przez $ab + 1$. Udowodnić, że

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

jest kwadratem liczby całkowitej.