XXX Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna

Brunszwik (RFN), lipiec 1989

Teksty zadań

1. Udowodnić, że zbiór $\{1, 2, \ldots, 1989\}$ można przedstawić w postaci sumy takich parami rozłącznych zbiorów A_i $(i = 1, 2, \ldots, 117)$, że:

(a) każdy zbiór A_i ma 17 elementów;

(b) $S_1 = S_2 = \ldots = S_{117}$, gdzie S_i jest sumą wszystkich liczb ze zbioru A_i.

2. Dwusieczne kątów A, B, C trójkąta ostrokątnego ABC przecinają opisany na nim okrąg odpowiednio w punktach A_1, B_1, C_1. Prosta AA_1 przecina dwusieczne kątów zewnętrznych przy wierzchołkach B i C trójkąta ABC w punkcie A_0. Punkty B_0 i C_0 określa się analogicznie. Udowodnić, że:

(a) $S(A_0B_0C_0) = 2S(AC_1BA_1CB_1)$;

(b) $S(A_0B_0C_0) \geqslant 4S(ABC)$.

Uwaga. $S(XY\ldots)$ oznacza pole wielokąta $XY\ldots$.

3. Niech n oraz k będą ustalonymi liczbami naturalnymi. Zbiór S złożony z n punktów płaszczyzny ma następujące własności:

(a) żadne trzy punkty zbioru S nie leżą na jednej prostej;

(b) dla każdego punktu P należącego do S istnieje w S co najmniej k różnych punktów równoodległych od P.

Udowodnić, że $k < \frac{1}{2} + 2n$.

4. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym, którego boki AB, AD i BC spełniają równość $|AB| = |AD| + |BC|$. Wewnątrz tego czworokąta znajduje się taki punkt P, że $|AP| = h + |AD|$ oraz $|BP| = h + |BC|$, gdzie h jest odległością punktu P od prostej CD.

Udowodnić, że

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{|AD|}} + \frac{1}{\sqrt{|BC|}}.$$

5. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje n kolejnych liczb naturalnych, z których żadna nie jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku całkowitym.

6. Permutację $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ będziemy nazywać *sympatyczną*, jeżeli równość $|x_i - x_{i+1}| = n$ zachodzi dla co najmniej jednej liczby i ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$.

Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n więcej niż połowę wszystkich permutacji stanowią permutacje sympatyczne.