XXXI Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna
Pekin (Chiny), lipiec 1990

Teksty zadań

1. Cięciwy AB i CD przecinają się w punkcie E leżącym wewnątrz danego okręgu. Niech M będzie punktem wewnętrznym odcinka BE. Styczna w punkcie E do okręgu przechodzącego przez punkty D, E i M przecina proste BC i AC odpowiednio w punktach F i G. Niech $|AM| : |AB| = t$. Wyrazić $|EG| : |EF|$ w zależności od t.

2. Na okręgu dany jest zbiór E złożony z $2n - 1$ różnych punktów ($n \geqslant 3$), spośród których k punktów koloruje się na czarno, pozostałe zaś na biało. Pokolorowanie punktów nazywa się „dobrym”, jeżeli istnieją dwa punkty czarne, między którymi na jednym z łuków okręgu leży dokładnie n punktów zbioru E. Wyznaczyć najmniejszą liczbę k, dla której każde pokolorowanie punktów zbioru E jest dobre.

3. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n > 1$, dla których $\dfrac{2^n + 1}{n^2}$ jest liczbą naturalną.

4. Niech $\mathbb{Q}^+$ będzie zbiorem liczb wymiernych dodatnich. Podać przykład funkcji $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ takiej, że

$$f\Big(x \cdot f(y)\Big) = \frac{f(x)}{y}$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{Q}^+$.

5. Dana jest liczba naturalna $n_0 > 1$. Gracze A i B wybierają kolejno liczby $n_1, n_2, \ldots$ według następujących reguł.

Gracz A znając liczbę n_{2k} może wybrać dowolną liczbę n_{2k+1}, dla której $n_{2k} \leqslant n_{2k+1} \leqslant n_{2k}^2$.

Gracz B znając liczbę n_{2k+1} wybiera dowolną liczbę n_{2k+2}, dla której $\dfrac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku całkowitym dodatnim.

Gracz A zwycięża, gdy wybierze liczbę 1990, B zaś, gdy wybierze liczbę 1.

Wyznaczyć wszystkie liczby n_0, dla których

(a) gracz A ma strategię zwycięską,

(b) gracz B ma strategię zwycięską,

(c) żaden z graczy nie ma strategii zwycięskiej.

6. Udowodnić, że istnieje wielokąt wypukły o 1990 bokach taki, że

(a) wszystkie jego kąty są równe;

(b) długości jego boków są równe $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 1989^2, 1990^2$ w pewnym porządku.