XXXII Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna

Szwecja, lipiec 1991

Teksty zadań

1. Dany jest trójkąt ABC, punkt I jest środkiem okręgu wpisanego. Dwusieczne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach A, B, C przecinają przeciwległe boki odpowiednio w punktach A', B' i C'. Udowodnić, że

$$\frac{1}{4} < \frac{|AI| \cdot |BI| \cdot |CI|}{|AA'| \cdot |BB'| \cdot |CC'|} \leqslant \frac{8}{27}.$$

2. Niech n będzie liczbą całkowitą większą od 6 i niech $a_1, a_2, \ldots, a_k$ będą wszystkimi liczbami naturalnymi mniejszymi od n i względnie pierwszymi z n. Udowodnić, że jeżeli $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_k - a_{k-1} > 0$, to n jest albo liczbą pierwszą, albo potęgą liczby 2 o wykładniku naturalnym.

3. Niech $S = \{1, 2, 3, \ldots, 280\}$. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną n, dla której w każdym n-elementowym podzbiorze zbioru S istnieje 5 liczb parami względnie pierwszych.

4. Niech G będzie grafem spójnym mającym k krawędzi. Udowodnić, że jego krawędzie można ponumerować wszystkimi liczbami $1, 2, 3, \ldots, k$ w taki sposób, że dla każdego wierzchołka, który należy do dwóch lub więcej krawędzi, największy wspólny dzielnik wszystkich numerów tych krawędzi równy jest 1.

Uwaga. Graf składa się ze zbioru punktów, nazywanych *wierzchołkami*, oraz zbioru *krawędzi* łączących pewne pary różnych wierzchołków. Każda para wierzchołków należy do najwyżej jednej krawędzi. Graf G jest *spójny*, jeżeli dla każdej pary różnych wierzchołków x, y istnieje ciąg wierzchołków $x = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m = y$ taki, że każda para v_i, v_{i+1} $(0 \leqslant i < m)$ jest połączona krawędzią grafu G.

5. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Udowodnić, że co najmniej jeden z kątów PAB, PBC, PCA nie przekracza $30°$.

6. Ciąg nieskończony $x_0, x_1, x_2, \ldots$ liczb rzeczywistych nazywamy *ograniczonym*, jeżeli istnieje taka stała C, że $|x_i| \leqslant C$ dla każdego $i \geqslant 0$.

Dana jest liczba rzeczywista $a > 1$. Skonstruować taki ciąg nieskończony ograniczony $x_0, x_1, x_2, \ldots$, że

$$|x_i - x_j| \cdot |i - j|^a \geqslant 1$$

dla każdej pary i, j różnych liczb całkowitych nieujemnych.