XXXIII Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna
Moskwa (Rosja), 15–16 lipca 1992

Teksty zadań

1. Znaleźć wszystkie liczby całkowite a, b, c takie, że $1 < a < b < c$ oraz liczba $(a-1)(b-1)(c-1)$ jest dzielnikiem liczby $abc - 1$.

2. Niech $\mathbb{R}$ oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że
$$f\Big(x^2 + f(y)\Big) = y + \Big(f(x)\Big)^2$$
dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

3. W przestrzeni danych jest dziewięć punktów, z których żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Każda para punktów jest połączona odcinkiem. Odcinek może być pokolorowany albo na niebiesko, albo na czerwono, albo pozostać niepokolorowanym. Wyznaczyć najmniejszą wartość n taką, że przy każdym pokolorowaniu dowolnych n odcinków pojawi się trójkąt o wszystkich bokach pokolorowanych jednakowym kolorem.

4. Na płaszczyźnie dany jest okrąg C, prosta l styczna do C oraz punkt M na prostej l. Wyznaczyć zbiór wszystkich punktów P o następującej własności: istnieją dwa punkty Q, R leżące na l takie, że M jest środkiem odcinka QR, a C jest okręgiem wpisanym w trókąt PQR.

5. W przestrzeni z prostokątnym układem współrzędnych $Oxyz$ dany jest skończony zbiór S. Niech S_x, S_y, S_z będą zbiorami złożonymi z rzutów prostokątnych wszystkich punktów zbioru S odpowiednio na płaszczyzny Oyz, Ozx, Oxy. Udowodnić, że
$$|S|^2 \leqslant |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|,$$
gdzie symbol $|A|$ oznacza liczbę elementów zbioru skończonego A.

Uwaga. Rzut prostokątny punktu na płaszczyznę to spodek prostopadłej opuszczonej na tę płaszczyznę z danego punktu.

6. Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n oznaczmy przez $S(n)$ największą liczbę całkowitą taką, że dla każdej liczby całkowitej k, spełniającej warunek $1 \leqslant k \leqslant S(n)$, liczba n^2 może być przedstawiona w postaci sumy k kwadratów dodatnich liczb całkowitych.

(a) Dowieść, że $S(n) \leqslant n^2 - 14$ dla wszystkich $n \geqslant 4$.

(b) Znaleźć liczbę całkowitą n taką, że $S(n) = n^2 - 14$.

(c) Dowieść, że dla nieskończenie wielu liczb całkowitych n zachodzi równość $S(n) = n^2 - 14$.