XXXIV Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna
Stambuł (Turcja), 18–19 lipca 1993

Teksty zadań

1. Niech $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, gdzie $n > 1$ jest liczbą całkowitą. Udowodnić, że wielomianu $f(x)$ nie można przedstawić w postaci iloczynu dwóch wielomianów mających wszystkie współczynniki całkowite i stopnie nie mniejsze od 1.

2. Punkt D leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC, przy czym
$$|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB| + 90^\circ \quad \text{oraz} \quad |AC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC|.$$

(a) Obliczyć wartość wyrażenia $\dfrac{|AB| \cdot |CD|}{|AC| \cdot |BD|}$.

(b) Udowodnić, że styczne w punkcie C do okręgów opisanych na trójkątach ACD i BCD są prostopadłe.

3. Na nieskończonej szachownicy rozgrywana jest następująca gra.

Na początku ustawia się n^2 pionków na polach tworzących kwadrat o wymiarach $n \times n$; na każdym z tych pól po jednym pionku. Dozwolone są ruchy w kierunku poziomym lub pionowym polegające na przeskoczeniu pionkiem przez jedno sąsiednie zajęte pole na następne wolne. Pionek, nad którym przeskoczono, zostaje usunięty.

Wyznaczyć te wartości n, dla których można zakończyć grę pozostawieniem na szachownicy tylko jednego pionka.

4. Dla trzech punktów P, Q, R na płaszczyźnie określamy $m(PQR)$ jako minimum długości wysokości trójkąta PQR (gdy P, Q, R leżą na prostej, to przyjmujemy $m(PQR) = 0$). Niech A, B, C będą danymi punktami płaszczyzny. Udowodnić, że dla dowolnego punktu X tej płaszczyzny
$$m(ABC) \leqslant m(ABX) + m(AXC) + m(XBC).$$

5. Przyjmujemy $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że $f(1) = 2$,
$$f(f(n)) = f(n) + n \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N},$$
$$f(n) < f(n+1) \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

6. Niech $n > 1$ będzie liczbą całkowitą. Na okręgu umieszczono n lamp $L_0, \ldots, L_{n-1}$. Każda lampa może być włączona albo wyłączona. Przeprowadzamy ciąg operacji $S_0, S_1, \ldots, S_i, \ldots$. Operacja S_j działa jedynie na lampę L_j (nie zmieniając stanu pozostałych lamp), jak następuje:

- jeżeli L_{j-1} jest włączona, to operacja S_j włącza lampę L_j jeśli była wyłączona, natomiast wyłącza — jeśli była włączona;
- jeżeli L_{j-1} jest wyłączona, to S_j niczego nie zmienia.

Lampy są ponumerowane (mod n), to znaczy,
$$L_{-1} = L_{n-1}, \quad L_0 = L_n, \quad L_1 = L_{n+1}, \quad \text{itd.}$$
Na początku wszystkie lampy są włączone. Wykazać, że:

(a) istnieje liczba całkowita dodatnia $M(n)$ taka, że po wykonaniu $M(n)$ operacji wszystkie lampy będą znów włączone;

(b) jeśli n jest postaci 2^k, to po wykonaniu $n^2 - 1$ operacji wszystkie lampy będą włączone;

(c) jeśli n jest postaci $2^k + 1$, to po wykonaniu $n^2 - n + 1$ operacji wszystkie lampy będą włączone.