XXXV Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna
Hongkong, lipiec 1994

Teksty zadań

1. Niech m i n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_m$ będą takimi różnymi elementami zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, że jeżeli $a_i + a_j \leqslant n$ dla pewnych i, j $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m)$, to istnieje numer k $(1 \leqslant k \leqslant m)$, dla którego $a_i + a_j = a_k$. Udowodnić, że
$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \geqslant \frac{n+1}{2}.$$

2. Trójkąt ABC jest równoramienny, $|AB| = |AC|$. Przyjmijmy, że:

(i) punkt M jest środkiem odcinka BC, a O jest takim punktem prostej AM, że odcinek OB jest prostopadły do AB;

(ii) Q jest dowolnym punktem odcinka BC różnym od B i C;

(iii) punkt E leży na prostej AB, punkt F leży na prostej AC, przy czym punkty E, Q i F są różne i leżą na jednej prostej.

Udowodnić, że $OQ \perp EF$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|QE| = |QF|$.

3. Gdy k jest liczbą całkowitą dodatnią, $f(k)$ oznacza liczbę tych elementów zbioru $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$, których rozwinięcie przy podstawie 2 ma dokładnie 3 jedynki.

(a) Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej m istnieje co najmmniej jedna liczba całkowita dodatnia k, dla której $f(k) = m$.

(b) Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie m, dla których istnieje dokładnie jedna taka liczba k, że $f(k) = m$.

4. Wyznaczyć wszystkie pary uporządkowane (m, n) liczb całkowitych dodatnich, dla których $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ jest liczbą całkowitą.

5. Niech S będzie zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych większych od -1. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon S \to S$ spełniające następujące dwa warunki:

(i) $f\Big(x + f(y) + xf(y)\Big) = y + f(x) + yf(x)$ dla wszystykich $x, y \in S$;

(ii) funkcja $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ jest ściśle rosnąca w każdym z przedziałów $-1 < x < 0$ oraz $0 < x$.

6. Wykazać, że istnieje zbiór A złożony z liczb całkowitych dodatnich mający następującą własność: dla każdego nieskończonego zbioru S złożonego z liczb pierwszych istnieje liczba $k \geqslant 2$, a także dwie liczby całkowite dodatnie: $m \in A$ i $n \notin A$, będące iloczynami k różnych elementów zbioru S.