XXXVI Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna

York (Kanada), 19–20 lipca 1995

Teksty zadań

1. Niech A, B, C i D będą czterema różnymi punktami leżącymi, w takim porządku, na linii prostej. Okręgi o średnicach AC oraz BD przecinają się w punktach X i Y. Proste XY i BC przecinają się w punkcie Z. Niech P będzie punktem prostej XY, różnym od Z. Prosta CP przecina okrąg o średnicy AC w punktach C i M; prosta BP przecina okrąg o średnicy BD w punktach B i N. Udowodnić, że proste AM, DN i XY przecinają się w jednym punkcie.

2. Niech a, b, c będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi takimi, że $abc = 1$. Dowieść, że

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

3. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n > 3$, dla których istnieje n punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ na płaszczyźnie oraz istnieją liczby rzeczywiste $r_1, r_2, \ldots, r_n$ spełniające następujące dwa warunki:

(i) żadne trzy spośród punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nie są współliniowe;

(ii) dla każdej trójki indeksów i, j, k $(1 \leqslant i < j < k \leqslant n)$ pole trójkąta $A_iA_jA_k$ jest równe $r_i + r_j + r_k$.

4. Wyznaczyć największą wartość x_0, dla której istnieje ciąg liczb rzeczywistych dodatnich $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$ spełniających dwa warunki:

(i) $x_0 = x_{1995}$;

(ii) $x_{i-1} + \dfrac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \dfrac{1}{x_i}$ dla $i = 1, 2, \ldots, 1995$.

5. Niech $ABCDEF$ będzie sześciokątem wypukłym takim, że

$$|AB| = |BC| = |CD|, \qquad |DE| = |EF| = |FA|$$

oraz

$$|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle EFA| = 60^\circ.$$

Niech G i H będą takimi dwoma punktami leżącymi wewnątrz owego sześciokąta, że $|\sphericalangle AGB| = |\sphericalangle DHE| = 120^\circ$. Udowodnić, że

$$|AG| + |GB| + |GH| + |DH| + |HE| \geqslant |CF|.$$

6. Niech p będzie liczbą pierwszą nieparzystą. Wyznaczyć liczbę podzbiorów A zbioru $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ takich, że:

(i) A ma dokładnie p elementów oraz

(ii) suma wszystkich elementów zbioru A jest podzielna przez p.