XXXVII Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna

Bombaj (Indie), 10–11 lipca 1996

Teksty zadań

1. Dana jest prostokątna tablica $ABCD$, w której $|AB| = 20$, $|BC| = 12$. Tablicę podzielono na 20×12 kwadratów jednostkowych. Niech r będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Możemy przesuwać monetę z pewnego kwadratu na inny wtedy i tylko wtedy, gdy odległość między środkami kwadratów jest równa $\sqrt{r}$. Zadanie polega na znalezieniu takiego ciągu ruchów, który przeprowadzi monetę z kwadratu, którego wierzchołkiem jest A, do kwadratu, którego wierzchołkiem jest B.

a) Udowodnić, że zadania nie można wykonać, jeśli r jest podzielne przez 2 lub 3.

b) Wykazać, że zadanie można wykonać, jeśli $r = 73$.

c) Czy zadanie można wykonać, gdy $r = 97$?

2. Niech P będzie takim punktem leżącym wewnątrz trójkąta ABC, że $|\sphericalangle APB| - |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle APC| - |\sphericalangle ABC|$. Punkty D i E są odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty APB i APC. Udowodnić, że proste AP, BD i CE przecinają się w jednym punkcie.

3. Niech $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ będzie zbiorem liczb całkowitych nieujemnych. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f określone na S i przyjmujące wartości w S, że

$$f\Big(m + f(n)\Big) = f\Big(f(m)\Big) + f(n)$$

dla wszystkich m, n należących do S.

4. Liczby całkowite dodatnie a i b mają tę własność, że liczby $15a + 16b$ oraz $16a - 15b$ są obie kwadratami liczb całkowitych dodatnich. Znaleźć najmniejszą wartość dodatnią, jaka może być przyjmowana przez minimum tych dwóch kwadratów.

5. Niech $ABCDEF$ będzie takim sześciokątem wypukłym, że AB jest równoległe do ED, BC jest równoległe do FE i CD jest równoległe do AF. Niech R_A, R_C, R_E będą odpowiednio promieniami okręgów opisanych na trójkątach FAB, BCD, DEF, zaś p niech będzie obwodem tego sześciokąta. Dowieść, że $R_A + R_C + R_E \geqslant p/2$.

6. Niech n, p, q będą takimi liczbami całkowitymi dodatnimi, że $n > p + q$. Niech $x_0, x_1, \ldots, x_n$ będą liczbami całkowitymi spełniającymi następujące warunki:
(i) $x_0 = x_n = 0$;
(ii) dla każdej liczby całkowitej i takiej, że $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\text{albo} \quad x_i - x_{i-1} = p \quad \text{albo} \quad x_i - x_{i-1} = -q.$$

Wykazać, że istnieje para wskaźników (i, j) spełniających warunki $i < j$ oraz $(i, j) \neq (0, n)$ taka, że $x_i = x_j$.