XXXIX Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna
Taipei (Tajwan), 15–16 lipca 1998

Teksty zadań

1. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne AC i BD są prostopadłe, a przeciwległe boki AB i DC nie są równoległe. Zakładamy, że symetralne boków AB i DC przecinają się w punkcie P leżącym wewnątrz czworokąta $ABCD$. Udowodnić, że czworokąt $ABCD$ da się wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąty ABP i CDP mają równe pola.

2. W konkursie bierze udział a uczestników, ocenianych przez b egzaminatorów, gdzie $b \geqslant 3$ jest liczbą całkowitą nieparzystą. Każdy egzaminator ocenia każdego uczestnika, wydając werdykt „zdał" lub „nie zdał". Załóżmy, że k jest liczbą o własności: dla każdych dwóch egzaminatorów ich oceny są zgodne dla co najwyżej k uczestników. Dowieść, że

$$\frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}.$$

3. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n oznaczmy przez $d(n)$ liczbę jej dodatnich dzielników (włącznie z 1 oraz n). Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite k takie,że

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

dla pewnego n.

4. Wyznaczyć wszystkie pary (a, b) liczb całkowitych dodatnich takie, że liczba $a^2b + a + b$ jest podzielna przez $ab^2 + b + 7$.

5. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Okrąg ten jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach K, L i M. Prosta przechodząca przez B i równoległa do MK przecina proste LM i LK odpowiednio w punktach R i S. Wykazać, że kąt RIS jest ostry.

6. Rozważamy wszystkie funkcje f ze zbioru $\mathbb{N}$ wszystkich liczb całkowitych dodatnich do tego samego zbioru, spełniające warunek

$$f(t^2 f(s)) = s(f(t))^2$$

dla wszystkich $s, t \in \mathbb{N}$. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość $f(1998)$.