XL Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna
Bukareszt (Rumunia), 16–17 lipca 1999

Teksty zadań

1. Wyznaczyć wszystkie zbiory skończone S na płaszczyźnie, złożone z co najmniej trzech punktów i spełniające następujący warunek: dla każdych dwóch różnych punktów A i B zbioru S symetralna odcinka AB jest osią symetrii zbioru S.

2. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną, $n \geqslant 2$.

(a) Wyznaczyć najmniejszą stałą C taką, że nierówność

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j \left(x_i^2 + x_j^2\right) \leqslant C \cdot \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i\right)^4$$

zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$.

(b) Dla tej stałej C, ustalić, kiedy zachodzi równość.

3. Rozważmy planszę kwadratową $n \times n$, gdzie n jest daną dodatnią liczbą całkowitą parzystą. Plansza jest podzielona na n^2 kwadratów jednostkowych. Dwa różne kwadraty planszy są *przyległe*, gdy mają wspólny bok. N kwadratów planszy zostało wyróżnionych w taki sposób, by każdy kwadrat planszy (wyróżniony lub nie) był przyległy do co najmniej jednego kwadratu wyróżnionego. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość N.

4. Wyznaczyć wszystkie pary (n, p) liczb całkowitych dodatnich takie, że

- p jest liczbą pierwszą,
- $n \leqslant 2p$,
- $(p-1)^n + 1$ dzieli się przez n^{p-1}.

5. Okręgi Γ_1 i Γ_2 są położone wewnątrz okręgu Γ i są odpowiednio styczne do Γ w różnych punktach M i N. Okrąg Γ_1 przechodzi przez środek okręgu Γ_2. Prosta przechodząca przez punkty przecięgia okręgów Γ_1 i Γ_2 przecina okrąg Γ w punktach A i B. Proste MA i MB przecinają Γ_1 odpowiednio w punktach C i D. Udowodnić, że prosta CD jest styczna do okręgu Γ_2.

6. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.