XLII Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna

USA, 8–9 lipca 2001

Teksty zadań

1. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego. Punkt P leżący na boku BC jest spodkiem wysokości z wierzchołka A. Zakładamy, że $|\sphericalangle BCA| \geqslant |\sphericalangle ABC| + 30^\circ$. Wykazać, że $|\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle COP| < 90^\circ$.

2. Udowodnić, że

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c.

3. W zawodach matematycznych uczestniczyło dwadześcia jeden dziewcząt i dwudziestu jeden chłopców.
— Każdy zawodnik i każda zawodniczka rozwiązał(-a) co najwyżej sześć zadań.
— Dla każdej dziewczyny i każdego chłopaka istnieje co najmniej jedno zadanie, które zostało rozwiązane przez oboje z nich.

Udowodnić, że istnieje zadanie, które zostało rozwiązane przez co najmniej trzy dziewczyny i co najmniej trzech chłopców.

4. Niech n będzie liczbą całkowitą nieparzystą większą od 1 i niech $k_1, k_2, \ldots, k_n$ będą danymi liczbami całkowitymi. Dla każdej spośród $n!$ permutacji $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ przyjmijmy

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i.$$

Dowieść, że istnieją dwie różne permutacje b oraz c takie, że liczba $S(b) - S(c)$ dzieli się przez $n!$.

5. W trójkącie ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie P, a dwusieczna kąta ABC przecina bok CA w punkcie Q. Wiadomo, że $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$ oraz $|AB| + |BP| = |AQ| + |QB|$. Jakie są możliwe miary kątów trójkąta ABC?

6. Niech a, b, c, d będą liczbami całkowitymi spełniającymi warunki $a > b > c > d > 0$. Zakładamy, że

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Dowieść, że liczba $ab + cd$ nie jest liczbą pierwszą.