XLIII Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna
Glasgow (Szkocja), 24–25 lipca 2002

Teksty zadań

1. Dana jest liczba całkowita dodatnia n. Niech T będzie zbiorem wszystkich punktów (x, y) na płaszczyźnie, których współrzędne x, y są liczbami całkowitymi nieujemnymi, spełniającymi warunek $x + y < n$. Każdy punkt zbioru T jest pokolorowany albo na czerwono, albo na niebiesko. Jeśli punkt (x, y) jest czerwony, to wszystkie punkty (x', y') zbioru T takie, że $x' \leqslant x$ oraz $y' \leqslant y$, są również czerwone.

Zbiorem typu X będziemy nazywać zbiór n punktów niebieskich o wszystkich współrzędnych x różnych. Zbiorem typu Y będziemy nazywać zbiór n punktów niebieskich o wszystkich współrzędnych y różnych. Udowodnić, że liczba zbiorów typu X jest równa liczbie zbiorów typu Y.

2. Niech BC będzie średnicą okręgu Γ o środku O. Punkt A leżący na okręgu Γ spełnia warunek $0^\circ < |\sphericalangle AOB| < 120^\circ$. Oznaczmy przez D środek tego łuku AB, który nie zawiera punktu C. Prosta przechodząca przez O i równoległa do DA przecina prostą AC w punkcie J. Symetralna odcinka OA przecina okrąg Γ w punktach E i F. Dowieść, że J jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt CEF.

3. Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych $m, n \geqslant 3$, dla których istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych a takich, że $\dfrac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$ jest liczbą całkowitą.

4. Dana jest liczba całkowita $n > 1$. Niech $d_1, d_2, \ldots, d_k$ będą wszystkimi dodatnimi dzielnikami liczby n, przy czym
$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n.$$
Przyjmijmy $D = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \ldots + d_{k-1} d_k$.
(a) Wykazać, że $D < n^2$.
(b) Wyznaczyć wszystkie n, dla których n^2 dzieli się przez D.

5. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (gdzie $\mathbb{R}$ jest zbiorem liczb rzeczywistych), spełniające równanie
$$\big(f(x) + f(z)\big)\big(f(y) + f(t)\big) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$
dla wszystkich $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

6. Na płaszczyźnie dane są okręgi $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ o promieniu 1, przy czym $n \geqslant 3$. Oznaczmy ich środki kolejno przez $O_1, O_2, \ldots, O_n$. Zakładamy, że żadna linia prosta nie ma punktów wspólnych z więcej niż dwoma z tych okręgów. Udowodnić, że
$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{O_i O_j} \leqslant \frac{(n-1)\pi}{4}.$$