XLIV Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna
Tokio (Japonia), 13–14 lipca 2003

Teksty zadań

1. Niech A będzie podzbiorem zbioru $S = \{1, 2, \ldots, 1\,000\,000\}$ zawierającym dokładnie 101 elementów. Dowieść, że w zbiorze S istnieją takie liczby $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$, że zbiory
$$A_j = \{x + t_j \colon x \in A\} \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, \ldots, 100$$
są parami rozłączne.

2. Wyznaczyć wszystkie takie pary liczb całkowitych dodatnich (a, b), że
$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$
jest liczbą całkowitą dodatnią.

3. Dany jest sześciokąt wypukły, w którym każde dwa przeciwległe boki mają następującą własność: odległość pomiędzy ich środkami jest równa sumie długości tych boków pomnożonej przez $\sqrt{3}/2$. Udowodnić, że wszystkie kąty tego sześciokąta są równe.
(Wypukły sześciokąt $ABCDEF$ ma trzy pary przeciwległych boków: AB i DE, BC i EF, CD i FA.)

4. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wpisanym w okrąg. Niech P, Q i R będą rzutami prostokątnymi z punktu D odpowiednio na proste BC, CA i AB. Wykazać, że $PQ = QR$ wtedy i tylko wtedy, gdy dwusieczne kątów ABC i ADC przecinają się na prostej AC.

5. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią oraz niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą liczbami rzeczywistymi spełniającymi $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$.

(a) Dowieść, że
$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \leqslant \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2.$$

(b) Wykazać, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest ciągiem arytmetycznym.

6. Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że istnieje taka liczba pierwsza q, że dla dowolnej liczby całkowitej n, liczba $n^p - p$ nie jest podzielna przez q.