XLV Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna
Ateny (Grecja), 12–13 lipca 2004

Teksty zadań

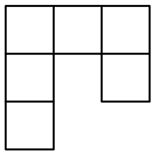
1. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym, w którym $AB \neq AC$. Okrąg o średnicy BC przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach M i N. Oznaczmy przez O środek boku BC. Dwusieczne kątów BAC i MON przecinają się w punkcie R. Wykazać, że okręgi opisane na trójkątach BMR i CNR mają punkt wspólny leżący na boku BC.

2. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, spełniające równość

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2\,P(a+b+c)$$

dla wszystkich takich liczb rzeczywistych a, b, c, że $ab + bc + ca = 0$.

3. *Hakiem* nazwiemy figurę utworzoną z sześciu kwadratów jednostkowych, jak pokazano na rysunku,



oraz każdą inną figurę otrzymaną z niej poprzez obroty i odbicia symetryczne.

Wyznaczyć wszystkie prostokąty $m \times n$, które można pokryć hakami w taki sposób, aby:
- prostokąt został całkowicie pokryty oraz żadne dwa haki nie zachodziły na siebie;
- żadna część haka nie wystawała poza prostokąt.

4. Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą. Niech $t_1, t_2, \ldots, t_n$ będą takimi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, że

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \ldots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots + \frac{1}{t_n}\right).$$

Udowodnić, że liczby t_i, t_j, t_k są długościami boków trójkąta dla wszystkich i, j, k spełniających $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$.

5. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątna BD nie jest dwusieczną żadnego z kątów ABC i CDA. Punkt P leży wewnątrz czworokąta $ABCD$, przy czym

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle DBA \qquad \text{oraz} \qquad \sphericalangle PDC = \sphericalangle BDA\,.$$

Dowieść, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $AP = CP$.

6. Liczbę całkowitą dodatnią nazwiemy *naprzemienną*, jeśli każde dwie kolejne cyfry jej rozwinięcia dziesiętnego są różnej parzystości.

Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, które mają wielokrotność będącą liczbą naprzemienną.