XLVI Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna

Merida, Meksyk

Pierwszy dzień
środa, 13 lipca 2005

Language: Polish

Zadanie 1. Na bokach trójkąta równobocznego ABC wybrano sześć punktów: A_1, A_2 na boku BC; B_1, B_2 na boku CA; C_1, C_2 na boku AB. Punkty te są wierzchołkami sześciokąta wypukłego $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$, którego wszystkie boki są równej długości. Dowieść, że proste A_1B_2, B_1C_2 oraz C_1A_2 przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 2. Niech $a_1, a_2, \ldots$ będzie ciągiem liczb całkowitych, zawierającym nieskończenie wiele wyrazów dodatnich oraz nieskończenie wiele wyrazów ujemnych. Załóżmy, że dla każdej liczby całkowitej n, liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dają n różnych reszt z dzielenia przez n. Wykazać, że każda liczba całkowita występuje w tym ciągu dokładnie raz.

Zadanie 3. Niech x, y i z będą takimi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, że $xyz \geqslant 1$. Udowodnić, że

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geqslant 0\,.$$

Czas na rozwiązywanie: 4 godziny 30 minut

Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów

XLVI Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna

Merida, Meksyk

Drugi dzień
czwartek, 14 lipca 2005

Language: Polish

Zadanie 4. Rozpatrzmy ciąg $a_1, a_2, \ldots$ dany wzorem

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie, które są względnie pierwsze z każdym wyrazem tego ciągu.

Zadanie 5. Niech $ABCD$ będzie ustalonym czworokątem wypukłym, którego boki BC i AD są równej długości i nie są równoległe. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach BC i AD, są różne od wierzchołków A, B, C, D oraz $BE = DF$. Proste AC i BD przecinają się w punkcie P, proste BD i EF przecinają się w punkcie Q, proste EF i AC przecinają się w punkcie R. Rozpatrujemy wszystkie trójkąty PQR, dla zmieniających położenie punktów E i F. Dowieść, że okręgi opisane na tych trójkątach mają punkt wspólny, różny od punktu P.

Zadanie 6. W zawodach matematycznych uczestnicy rozwiązywali 6 zadań. Każde dwa zadania zostały rozwiązane przez więcej niż $\frac{2}{5}$ uczestników. Nikt nie rozwiązał wszystkich 6 zadań. Wykazać, że w zawodach wzięło dział co najmniej 2 uczestników, z których każdy rozwiązał dokładnie 5 zadań.

Czas na rozwiązywanie: 4 godziny 30 minut

Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów