

12 lipca 2006 r.

Zadanie 1.

Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Punkt P leży wewnątrz tego trójkąta, przy czym

$$\sphericalangle PBA + \sphericalangle PCA = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB.$$

Dowieść, że $AP \geq AI$ oraz że równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $P = I$.

Zadanie 2.

Niech P będzie 2006-kątem foremny. Przekątną wielokąta P nazwiemy *dobrą*, jeśli jej końce dzielą brzeg tego wielokąta na dwie części, z których każda składa się z nieparzystej liczby boków wielokąta P . Każdy bok wielokąta P również nazwiemy *dobrym*.

Założmy, że wielokąt P podzielono na trójkąty przy pomocy 2003 przekątnych, z których żadne dwie nie przecinają się wewnątrz wielokąta P . Wyznaczyć największą liczbę trójkątów równoramiennych, które mogą pojawić się w takiej konfiguracji i które mają dwa dobre boki.

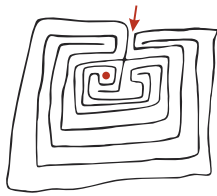
Zadanie 3.

Wyznaczyć najmniejszą liczbę rzeczywistą M taką, że nierówność

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

jest spełniona dla wszystkich liczb rzeczywistych a , b oraz c .

*Czas na rozwiązywanie: 4 godziny 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów*



13 lipca 2006 r.

Zadanie 4.

Wyznaczyć wszystkie pary (x, y) liczb całkowitych, dla których

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Zadanie 5.

Niech $P(x)$ będzie wielomianem stopnia $n > 1$ o współczynnikach całkowitych oraz niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą. Rozpatrujemy wielomian $Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots))$, gdzie P występuje k razy. Wykazać, że istnieje co najwyżej n takich liczb całkowitych t , że $Q(t) = t$.

Zadanie 6.

Każdemu bokowi b wypukłego wielokąta P przyporządkowujemy największe pole trójkąta, którego jednym z boków jest odcinek b i który jest zawarty w wielokącie P . Udowodnić, że suma pól przyporządkowanych bokom wielokąta P jest nie mniejsza od podwojonego pola wielokąta P .

*Czas na rozwiązywanie: 4 godziny 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów*