Version: Polish

25 lipca 2007 r.

Zadanie 1.
Dane są liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dla każdego i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ określamy

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leqslant j \leqslant i\} - \min\{a_j : i \leqslant j \leqslant n\}$$

oraz

$$d = \max\{d_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

(a) Dowieść, że dla każdych liczb rzeczywistych $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ spełniona jest nierówność

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leqslant i \leqslant n\} \geqslant \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

(b) Wykazać, że istnieją takie liczby rzeczywiste $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, dla których nierówność $(*)$ staje się równością.

Zadanie 2.
Rozpatrzmy takich pięć punktów A, B, C, D, E, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, a na czworokącie wypukłym $BCED$ można opisać okrąg. Niech ℓ będzie prostą przechodzącą przez punkt A. Przypuśćmy, że prosta ℓ przecina wnętrze odcinka DC w punkcie F, a prostą BC w punkcie G. Niech ponadto $EF = EG = EC$. Udowodnić, że prosta ℓ jest dwusieczną kąta DAB.

Zadanie 3.
W zawodach matematycznych niektórzy uczestnicy przyjaźnią się. Przyjaźń jest zawsze wzajemna. Grupę uczestników nazwiemy *kliką*, jeśli każdych dwóch zawodników tej grupy przyjaźni się. (W szczególności, każda grupa złożona z mniej niż dwóch zawodników jest kliką.) Liczbę osób, jaką liczy klika nazwiemy jej *rozmiarem*.

Wiadomo, że w zawodach tych rozmiar największej kliki jest liczbą parzystą. Dowieść, że uczestników zawodów można rozdzielić do dwóch pokoi tak, aby rozmiar największej kliki w jednym pokoju był równy rozmiarowi największej kliki w drugim pokoju.

Czas na rozwiązywanie: 4 godziny 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów

Version: Polish

26 lipca 2007 r.

Zadanie 4.
W trójkącie ABC dwusieczna kąta BCA przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie R różnym od C, symetralną odcinka BC w punkcie P oraz symetralną odcinka AC w punkcie Q. Punkt K jest środkiem odcinka BC, a punkt L jest środkiem odcinka AC. Wykazać, że trójkąty RPK oraz RQL mają równe pola.

Zadanie 5.
Niech a oraz b będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Dowieść, że jeśli liczba $(4a^2-1)^2$ jest podzielna przez $4ab-1$, to $a=b$.

Zadanie 6.
Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Rozpatrujemy

$$S=\{(x,y,z) : x,y,z\in\{0,1,\ldots,n\},\ x+y+z>0\}$$

jako zbiór $(n+1)^3-1$ punktów w przestrzeni trójwymiarowej. Wyznaczyć najmniejszą możliwą liczbę płaszczyzn, których suma zawiera zbiór S, ale nie zawiera punktu $(0,0,0)$.

Czas na rozwiązywanie: 4 godziny 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów