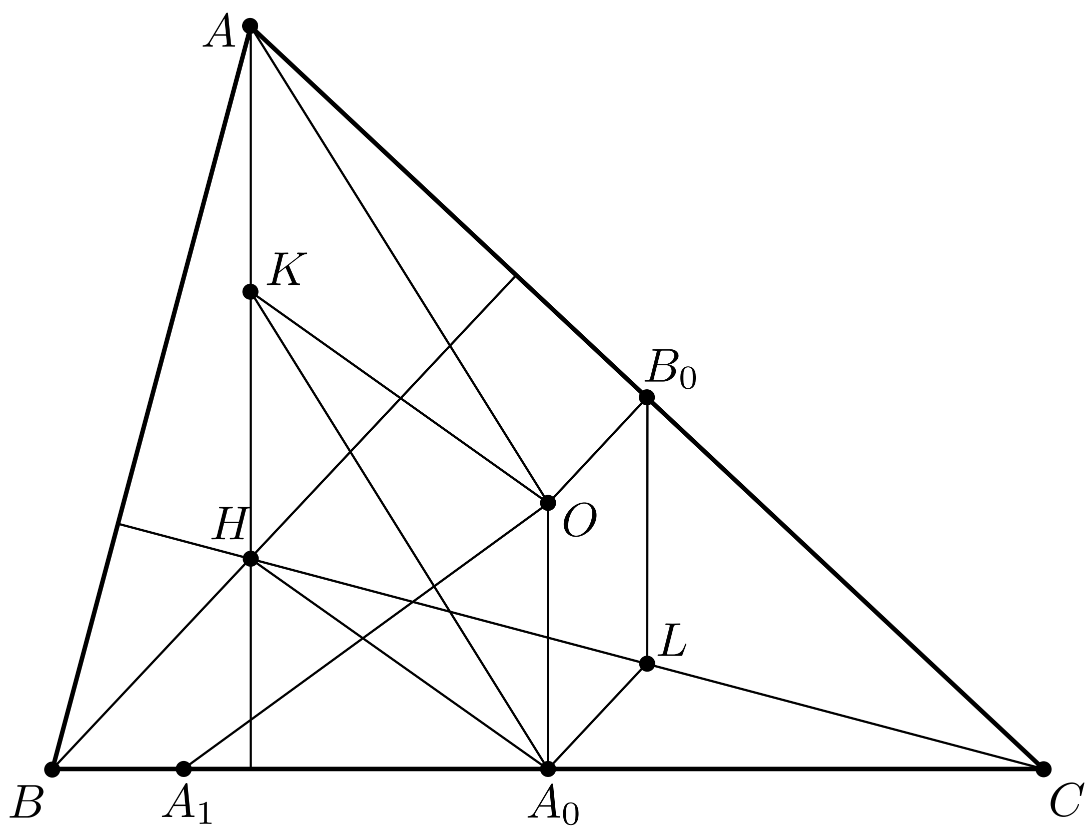
Rozwiązania zadań z 49 MOM

1. Wysokości trójkąta ostrokątnego ABC przecinają się w punkcie H. Okrąg, którego środkiem jest środek odcinka BC i który przechodzi przez punkt H przecina prostą BC w punktach A_1 i A_2. Analogicznie okrąg, którego środkiem jest środek odcinka CA i który przechodzi przez punkt H przecina prostą CA w punktach B_1 i B_2, zaś okrąg, którego środkiem jest środek odcinka AB i który przechodzi przez punkt H przecina prostą AB w punktach C_1 i C_2.

Udowodnić, że punkty A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie. Niech A_0, B_0 i C_0 oznaczają środki boków BC, CA i AB. Symetralna odcinka A_1A_2 jest też symetralną odcinka BC. Analogicznie symetralna odcinka B_1B_2 jest symetralną odcinką AC, a symetralna odcinka C_1C_2 — symetralną odcinka AB. Wynika stąd, że jeśli punkty $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ leżą na jednym okręgu, to jego środkiem jest środek O okręgu opisanego na trójkącie ABC. Ponieważ trójkąt OA_0A_1 jest prostokątny, więc

$$OA_1^2 = OA_0^2 + A_0A_1^2 = OA_0^2 + A_0H^2\ . \tag{1}$$



Niech K będzie środkiem odcinka AH a L — środkiem odcinka CH. Poniewa"r punkty A_0 i B_0 są środkami odcinków BC i CA, więc $A_0L \parallel BH$ i $B_0L \parallel AH$. Wynika stąd, że odcinki A_0L i B_0L są prostopadłe do boków AC i BC, zatem równoległe do odcinków OB_0 i OA_0. Wykazaliśmy więc, że figura OA_0LB_0 jest równoległobokiem i wobec tego odcinki OA_0 i B_0L są równe i rówoległe. Końce odcinka B_0L są środkami boków trójkąta AHC, więc ten odcinek jest równoległy do obu odcinków HK i KA. Ma też taką samą długośc, jak każdy z nich. Czworokąt AKA_0O jest więc równoległobokiem, zatem $A_0K = OA = R$, gdzie R oznacza promień okręgu opisanego na trójkącie ABC. Równoległobokiem jest też czworokąt

HA_0OK, więc sum,a kwadrató wszystkich jego czterech boków jest równa sumie kwadratów obu przekątnych:

$$2(OA_0^2 + A_0H^2) = OH^2 + A_0K^2 = OH^2 + R^2 \ . \tag{2}$$

Z równości (1) i (2) wynika związek $OA_1^2 = \frac{1}{2}(OH^2 + R^2)$, więc też $OA_2^2 = \frac{1}{2}(OH^2 + R^2)$. Analogicznie $OB_1^2 = OB_2^2 = \frac{1}{2}(OH^2 + R^2)$ i $OC_1^2 = OC_2^2 = \frac{1}{2}(OH^2 + R^2)$.

Udowodniliśmy w ten sposób, że punkty A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 leżą na okręgu o środku O i promieniu $\sqrt{\frac{1}{2}(OH^2 + R^2)}$.

2. (a) Udowodnić, że jeśli $xyz = 1$ i żadna z liczb rzeczywistych x, y, z nie jest równa 1, to spełniona jest nierówność:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1 \ . \tag{N}$$

(b) Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele trójek liczb wymiernych x, y, z, każda z których jest różna od 1, dla których spełniona jest równość $xyz = 1$ i dla których nierówność (N) staje się równością.

Rozwiązanie. Oznaczmy $a = \frac{x}{x-1}$, $b = \frac{y}{y-1}$, $c = \frac{c}{c-1}$. Wtedy $x = \frac{a}{a-1}$, $y = \frac{b}{b-1}$ i $z = \frac{c}{c-1}$, a nierówność (N) przybiera postać: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$, przy czym liczby a, b, c powiązane są warunkiem: $abc = (a-1)(b-1)(c-1) = abc - (ab + bc + ca) + (a + b + c) - 1$, czyli $ab + bc + ca = (a + b + c) - 1$. Mamy zatem
$a^2+b^2+c^2-1 = (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)-1 = (a+b+c)^2-2(a+b+c)+1 = (a+b+c-1)^2 \geq 0$.
Zakończyliśmy dowód części (a).

Nieróweość (N) staje się rówością wtedy i tylko wtedy, gdy $0 = a^2+b^2+c^2-1 = (a+b+c-1)^2$, więc gdy $a^2 + b^2 + c^2 = 1 = a + b + c$. Otrzymana zależnosci można potraktować jako układ równań z parametrem a i niewiadomymi b, c:

$$\begin{cases} b + c &= 1 - a, \\ b^2 + c^2 &= 1 - a^2. \end{cases}$$

Mamy więc $c = 1 - a - b$, zatem $0 = b^2 + (1 - a - b)^2 - 1 + a^2 = 2b^2 - 2(1 - a)b + 2a^2 - 2a$. Stąd wynika, że $b = \frac{1}{2}\big(1 - a \pm \sqrt{(1-a)^2 - 4a^2 + 4a}\,\big) = \frac{1}{2}\big(1 - a \pm \sqrt{(1-a)(1+3a)}\,\big)$. Dalej przyjmujemy, że $b = \frac{1}{2}\big(1 - a + \sqrt{(1-a)^2 - 4a^2 + 4a}$ Przyjmując $1 - a = \frac{k^2}{n^2}$ i $1 + 3a = \frac{m^2}{n^2}$ otrzymujemy równość: $4n^2 = m^2 + 3k^2$, czyli $(2n-m)(2n+m) = 3k^2$. Wystarczy, by $2n - m = 1$ i $2n + m = 3k^2$, co prowadzi do równości: $4n = 3k^2 + 1$ i $2m = 3k^2 - 1$. Jasne jest, że dla dowolnej nieparzystej liczby całkowitej k liczby m i n są całkowite. Wtedy
$a = 1 - \frac{k^2}{n^2} = 1 - \frac{16k^2}{(3k^2+1)^2} = \frac{9k^4-10k^2+1}{(3k^2+1)^2}$,

$b = \frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{n^2} + \sqrt{\frac{k^2}{n^2} \cdot (4 - 3\frac{k^2}{n^2})}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{n^2} + \frac{k}{n} \cdot \frac{m}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{16k^2}{(3k^2+1)^2} + \frac{4k}{3k^2+1} \cdot \frac{2(3k^2-1)}{3k^2+1}\right) = \frac{4(3k^3+2k^2-k)}{(3k^2+1)^2}$,

$c = 1 - a - b = \frac{16k^2}{(3k^2+1)^2} - \frac{4(3k^3+2k^2-k)}{(3k^2+1)^2} = 4\frac{-3k^3+2k^2+k}{(3k^2+1)^2}$.
Otrzymaliśmy trójki, które spełniają ukąd r"ownań. Dla $k = 1, 2, 3, \ldots$ otrzymujemy różne trójki, bo:

$$\frac{k+1}{3(k+1)^2+1} - \frac{k}{3k^2+1} = \frac{(k+1)(3k^2+1) - k(3(k+1)^2+1)}{(3(k+1)^2+1)(3k^2+1)} = \frac{-3k^2 - 3k + 1}{(3(k+1)^2+1)(3k^2+1)} < 0$$

dla $k \geq 1$, zatem wartości a otrzymywane dla różnych k są różne.

Uwaga: Można otrzymać wiele innych trójek liczb wymiernych spełniających żądany warunek, np. $a = \frac{k}{k^2-k+1}$, $b = \frac{k^2-k}{k^2-k+1}$, $c = \frac{1-k}{k^2-k+1}$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots$.

3. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n, dla których liczba $n^2 + 1$ ma dzielnik pierwszy większy niż $2n + \sqrt{2n}$.

Rozwiązanie. Niech p będzie dzielnikiem pierwszym liczby $(N!)^2 + 1$ przy czym $N \geq 2$. Oczywiście $p > N$. Niech $x \in \left(0, \frac{p}{2}\right)$ oznacza resztę z dzielenia liczby $N!$ lub $-N!$ przez p. Wtedy $0 < x < p - x < p$. Liczba $x^2 + 1$ jest podzielna przez p, bo dla pewnej liczby naturalnej m zachodzi jedna z dwu równości $N! = mp + x$ lub $-N! = mp + x$, a w obu przypadkach mamy $(N!)^2 + 1 = (mp + x)^2 + 1 = m^2p^2 + 2mp + x^2 + 1$, zatem $x^2 + 1 = (N!)^2 + 1 - m^2p^2 - 2mp$. Wynika stąd, że liczba p jest dzielnikiem liczby $p^2 - 2px + 4x^2 + 4 = (p - 2x)^2 + 4$, a stąd wnioskujemy, że $p \leq (p - 2x)^2 + 4$, zatem $p \geq 2x + \sqrt{p - 4}$. Jeśli $p > 20$, to

$$p - 4 \geq 2x + \sqrt{p - 4} - 4 > 2x + \sqrt{20} - 4 > 2x,$$

więc $p \geq 2x + \sqrt{p - 4} > 2x + \sqrt{2x}$.

4. Znaleźć wszystkie takie funkcje $f\colon (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ (czyli funkcje określone na zbiorze wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych, których wartościami są wyłącznie dodatnie liczby rzeczywiste), że równość

$$\frac{\big(f(w)\big)^2 + \big(f(x)\big)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

zachodzi dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych w, x, y, z spełniających warunek $wx = yz$.

Rozwiązanie. Załóżmy, że funkcja f spełnia podany warunek. Przyjmując $w = x = y = z = 1$ otrzymujemy $f(1) = 1$. Teraz przyjmujemy, że $x = 1$, w jest dowolną liczbą dodatnią i $y = z = \sqrt{w}$. Otrzymujemy

$$\frac{f(w)^2 + 1}{2f(w)} = \frac{w^2 + 1}{2w}.$$

Mamy więc

$$f(w) + \frac{1}{f(w)} = w + \frac{1}{w}.$$

Otrzymaliśmy równanie z niewiadomą $f(w)$ i z parametrem w, które bez trudu można przepisać jako kwadratowe, więc ma ono nie więcej niż dwa pierwiastki. Jasne jest, że pierwiastkami są $f(w) = w$ oraz $f(w) = \frac{1}{w}$. Udowodniliśmy, że dla każdej liczby $w > 0$ zachodzi jedna z dwu równości

$$f(w) = w, \qquad\qquad f(x) = \frac{1}{w}.$$

Jest też jasne, że funkcje zdefiniowane wzorami $\varphi(x) = x$ oraz $\psi(x) = \frac{1}{x}$ spełniają warunek z zadania.

Wykażemy, że są to jedyne funkcje, które spełniają nałożony warunek. Załóżmy, że funkcja f spełnia warunek z treści zadania i że $f \neq \varphi$ oraz $f \neq \psi$. Ponieważ $f \neq \varphi$, więc istnieje taka liczba $a > 0$, że $f(a) \neq a$, zatem musi być spełniona równość $f(a) = \frac{1}{a}$. Ponieważ $f \neq \psi$, więc istnieje taka liczba $b > 0$, że $f(b) \neq \frac{1}{b}$, a to oznacza, że $f(b) = b$. Niech $w = a$, $x = b$ i $y = z = \sqrt{ab}$. Wtedy

$$\frac{\frac{1}{a^2} + b^2}{2f(ab)} = \frac{f(a)^2 + f(b)^2}{f(ab) + f(ab)} = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$$

Wiemy, że zachodzi jedna z dwu równości $f(ab) = ab$ albo $f(ab) = \frac{1}{ab}$. W pierwszym przypadku otrzymujemy: $\frac{1}{a^2} + b^2 = a^2 + b^2$, zatem $a = 1$. Przeczy to temu, że $f(a) \neq a$. Musi więc być spełniony warunek $f(ab) = \frac{1}{ab}$. Wtedy $\frac{1}{a^2} + b^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$, zatem $b = 1$, co przeczy temu, że $f(b) \neq \frac{1}{b}$. Założenie, że $f \neq \varphi$ i $f \neq \psi$ doprowadziło nas do sprzeczności, zatem albo $f = \varphi$ albo $f = \psi$.

5. Niech n i k będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że $k \geq n$ oraz $k - n$ jest liczbą parzystą. Danych jest $2n$ lamp oznaczonych liczbami 1, 2, $\ldots$, $2n$. Każda z nich może być włączona lub wyłączona. W chwili początkowej wszystkie są wyłączone. Rozpatrujemy ciągi przełączeń: za każdym razem dokładnie jedna lampa jest przełączana, tzn. włączona jest wyłączana, a wyłączona — włączana.

Niech N będzie liczbą ciągów złożonych z k przeł ączeń takich, że po tych k przełączeniach wszystkie lampy oznaczone liczbami od 1 do n są włączone, a wszystkie lampy oznaczone liczbami od $n+1$ do $2n$ — wyłączone.

Niech M będzie liczbą takich ciągów złożonych z k przełączeń, że po tych k przełączeniach wszystkie lampy oznaczone liczbami od 1 do n są włączone, a wszystkie lampy oznaczone liczbami od $n+1$ do $2n$ — wyłączone przy czym ani jedna z lamp oznaczonych liczbami od $n+1$ do $2n$ nie była przełączana.

Znaleźć stosunek $\frac{N}{M}$.

Rozwiązanie. k–elementowy ciąg liczb o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n-1, 2n\}$ nazywamy *dopuszczalnym*, jeśli każda z liczb $1, 2, \ldots, n$ występuje w nim nieparzystą liczbę razy, a każda z liczb $n+1, n+2, \ldots, 2n$ parzystą liczbę razy (być może 0 razy). Jasne jest, że takie ciągi można utożsamić z ciągami przełączeń, w wyniku których pierwszych n lamp jest włączonych, a następnych n — wyłączonych. Jeśli w ciągu dopuszczalnym nie występują liczby $n+1, n+2, \ldots, 2n$, czyli jeśli lampy o numerach $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $2n$ nie były przełączane, to taki ciąg nazywamy *oszczędnym* .

Ciągów dopuszczalnych jest oczywiście N, a oszczędnych — M.

Ciągi oszczędne istnieją, czyli $M > 0$, np. oszczędny jest ciąg, w którym każda z liczb $2, 3, \ldots, n$ występuje w ciągu raz, a jedynka — $k - n + 1$ razy. Liczba $k - n + 1$ jest nieparzysta na mocy założenia.

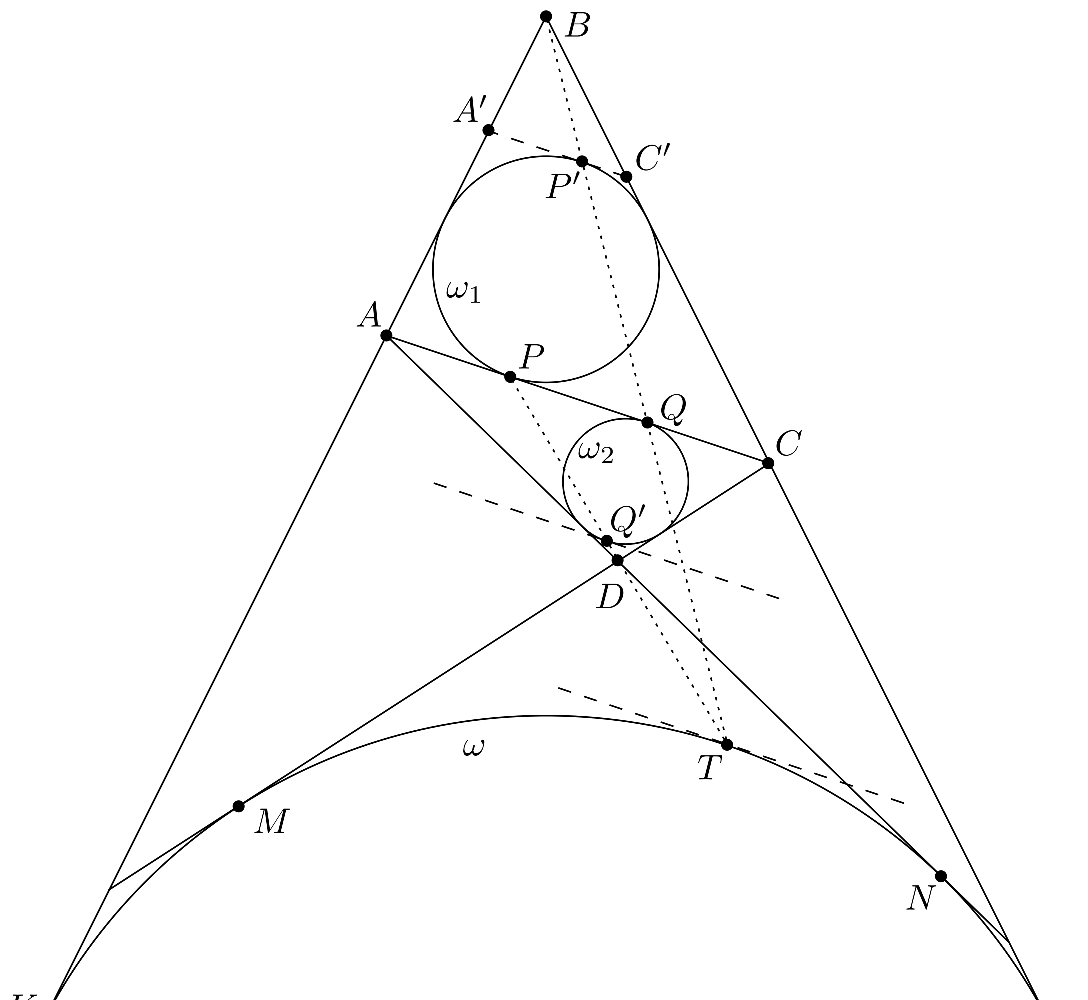
Niech $\mathbf{c}$ będzie ciągiem oszczędnym. Niech k_ℓ oznacza liczbę tych wyrazów ciągu, które są równe ℓ, $\ell \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Oczywiście każda z liczb $k_1, k-2, \ldots, k_n$ jest nieparzysta oraz $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$. Dla każdej z liczb $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$ wybieramy parzystą liczbę wyrazów ciągu równych ℓ (być może 0 wyrazów) i zastępujemy każdy z nich wyrazem równym $n+\ell$. Dla **ustalonego** ℓ mżemy to zrobić na $2^{k_\ell - 1}$ sposobów, bo zbiów k_ℓ–elementowy ma $2^{k_\ell - 1}$ podzbiorów, których liczba elementów jest parzysta. W ten sposób z każdego ciągu oszczędnego można utworzyć dokładnie $2^{k_1-1} \cdot 2^{k_2-1} \cdot \ldots \cdot 2^{k_n-1} = 2^{k_1+k_2+\cdots+k_n-n} = 2^{k-n}$ ciągów dopuszczalnych. W ten sposób z M ciagów oszczędnych otrzymujemy $M \cdot 2^{k-n}$ ciag"ow dopuszczalnych.

Jasne jest, że ta procedura jest odwracalna, tzn. można zastąpić ciąg dopuszczalny oszczędnym zastępując każdy z wyrazów równych $n+1$ jedynką, każdy z wyrazów równych 2 — dwójką itd. Innymi słowy procedura opisana w poprzednim akapicie pozwala otrzymać **wszystkie** ciągi dopuszczalne, więc ciągów dopuszczalnych jest dokładnie $M\cdot 2^{k-n}$, czyli

$$\frac{N}{M}=2^{k-n}.$$

6. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym, w którym $|BA|\neq|BC|$. Oznaczmy okręgi wpisane w trójkąty ABC i ADC odpowiednio symbolami ω_1 i ω_2. Załóżmy, że istnieje okrąg ω styczny: do półprostej $BA^{\rightarrow}$ w punkcie leżącym poza odcinkiem BA, do półprostej $BC^{\rightarrow}$ w punkcie leżącym poza odcinkiem BC i który jest też styczny do prostych AD i CD. Udowodnić, że punkt przecięcia wspólnych stycznych zewnętrznych do okręgów ω_1 i ω_2 leży na okręgu ω.

Rozwiązanie.



Zaczniemy od dwóch prostych lematów.

Lemat 1. Dany jest taki czworokąt wypukły $ABCD$, że istnieje okrąg wpisany w kąt $\angle ABC$ styczny do prostych AD i BC. Wtedy $AB+AD=BC+CD$.

Dowód. Niech punktami styczności okręgu z prostymi AB, BC, CD i DA będą odpowiednio punkty K, L, M i N. Z twierdzenia o odcinkach stycznych do okręgu wynika natychmiast, że $AB+AD=(BK-AK)+(AN-DN)=BK-DN=BL-DM=(BL-CL)+(CM-DM)=BC+CD$, co kończy dowód tego lematu.

Lemat 2. Niech P będzie punktem styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokiem AC i niech PP' będzie średnicą tego okręgu. Niech Q oznacza punkt przecięcia prostych BP' i AC. Wtedy punkt Q jest punktem styczności okręgu dopisanego do trókąta ABC z prostą AC.

Dowód. Niech styczna w punkcie P' do okręgu ω_1 przecina półproste $BA^{\rightarrow}$ i $BC^{\rightarrow}$ odpowiednio w punktach A' i C'. Jednokładność o środku B i skali $\frac{BQ}{BP'}$ przekształca prostą $A'C'$ na prostą AC, punkt P' na punkt Q, okrąg ω_1 na okrąg dopisany do trójkąta ABC, styczny do boku AC w punkcie Q, więc lemat został udowodniony.

Z twierdzenia o równości odcinków stycznych do okręgu wynikają łatwo równości

$$AP = \tfrac{1}{2}(AB + AC - BC) = CQ\,.$$

Oznaczmy punkt styczności okręgu ω_2 z prostą AC symbolem Q_1. Zachodzą znane równości $CQ_1 = \frac{1}{2}(AC + DC - AD)$ oraz $CQ = \frac{1}{2}(AC + AB - BC)$. Z nich i z lematu 1. wynika, że $DC - AD = AB - BC$. Wynika stąd, że $Q = Q_1$. Ponieważ $AB \neq BC$, więc $P \neq Q$.

Oznaczmy przez Q' koniec średnicy okręgu ω_2 zaczynającej się w punkcie Q. Rozumując tak, jak poprzednio przekonujemy się, że punkt P jest punktem styczności okręgu dopisanego do okręgu ω_2 z odcinkiem AC i że punkty D, Q', P są współliniowe.

Niech T będzie obrazem punktu P' w jednokładności względem punktu B przekształcającej okrąg ω_1 na okrąg ω. Punkty B, P' i T leżą na jednej prostej, wobec tego punkty B, P', Q i T są współliniowe. T jest końcem średnicy okręgu ω prostopadłej do prostej AC, bo P' jest końcem średnicy okręgu ω_1 prostopadłej do prostej $A'C'$, która jest równoległa do prostej AC.

Obrazem punktu P w jednokładności względem punktu D o ujemnej skali, przekształcającej okrąg ω_2 na okrąg ω jest również koniec średnicy okręgu ω, prostopadłej do prostej AC, oczywiście ten z dwóch, który jest bliższy prostej AC. Jest więc to punkt T.

Wynika stąd, że jednokładność o środku T i skali $\frac{TC'}{TQ}$ przekształca okrąg ω_2 na okrąg ω_1. Wobec tego wspólne styczne zewnętrzne przechodzą przez punkt T.